# 12 Электростатика

## 12.1 Электризация тел. Электрический заряд. Закон сохранения заряда.

Не все явления в природе можно объяснить при помощи механики, МКТ и термодинамики. В механике мы давали классификацию основных видов взаимодействия между телами. Вспомним, что взаимодействия между частицами внутри атомов и взаимодействие самих атомов, относят к электромагнитным взаимодействиям.

**Def.** Электродинамика - раздел физики изучающий электромагнитное взаимодействие.

**Def.** Электростатика - это раздел электродинамики, изучающий взаимодействие покоящихся электрических зарядов и заряженных частиц.

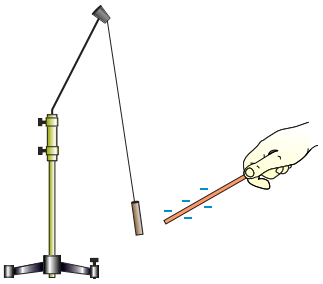
Вспомним, как можно получить заряд и что это такое? Электрический заряд можно получить в результате электризации тел.

physics.spb.ru

**Def.** Электризация - процесс в результате которого тело приобретает электрический заряд.

**Def.** Электрический заряд - это скалярная физическая величина характеризующая способность тел к электромагнитным взаимодействиям.

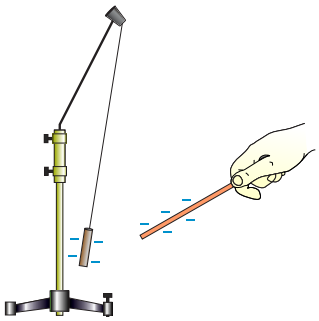
Первым кто подробно изучил электростатические явления был английский физик и придворный врач английской королевы Елизаветы I - Уильям Гильберт. Именно Гильберт ввел термин электричество (от греческого названия янтаря — «электрон»), создал первый в мире электроскоп и подробно изучил виды электризации.



### 12.1.1 Виды электризации.

Электризация бывает четырех видов: трением(Эмиссия электронов), контактная, влиянием (электростатическая индукция), при химических реакциях. Рассмотрим примеры этих видов электризации.

**Электризация трением.**



Электризация трением, происходит при трении двух тел друг о друга. Если например потереть эбонитовую палочку о шерсть или стеклянную палочку о шелк, то они приобретают способность притягивать к себе мелкие тела, листки бумаги и т.п.

Рассмотрим следующий опыт. (Видеоэксперимент). На шелковой нити висит цилиндр из фольги, который принято называть гильзой.

Если к гильзе поднести эбонитовую палочку, потертую о шерсть, то гильза начинает притягиваться к палочке.

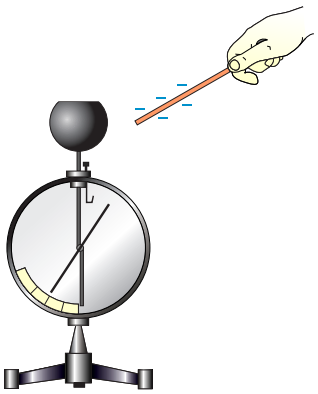
В быту мы сталкиваемся с электризацией трением, когда одеваем синтетические вещи. В процесс одевания, они трутся о поверхность нашего тела и мы электризуемся. Далее при соприкосновении с другими проводящими телами, проскакивает искра, т.е. мы разряжаемся.

**Контактная электризация.**

Контактная электризация происходит при соприкосновении наэлектризованного тела и не наэлектризованного. Например в опыте с гильзой, она может коснуться наэлектризованной палочки и в следующее мгновение оттолкнется от нее. Таким образом гильза в результате соприкосновения приобрела тот же заряд, что и палочка.

**Электризация влиянием.**

Электризация влиянием происходит при приближении заряженного тела к незаряженному. Например если заряженную палочку поднести к электрометру, но не касаться, электрометр покажет наличие заряда.



*Электрометр это прибор позволяющий измерить электрический заряд тела.*

Данное определение, будет уточнено позднее, в теме "Потенциал".

**Электризация при химической реакции.**

В химических источниках тока, заряды образуются в результате химических реакций окисления и восстановления, происходящие внутри источников. При окислении атома вещества отдают электроны. В этом случае атомы и вещество в целом приобретают положительный заряд. А при восстановлении атомы вещества присоединяют к себе электроны и приобретают отрицательный заряд.

Physics.spb.ru

### 12.1.2 Свойства электрического заряда.

В определении сказано, что заряд это скаляр. В формулах заряд обозначают - $q$.

Единицы измерения:

$$[q] = \text{Кл (Кулон)}$$

Стоит отметить, что статический заряд в 1 Кулон это очень большой заряд, который в обычных условиях не получится накопить на одном теле.

Рассмотрим теперь свойства электрического заряда.

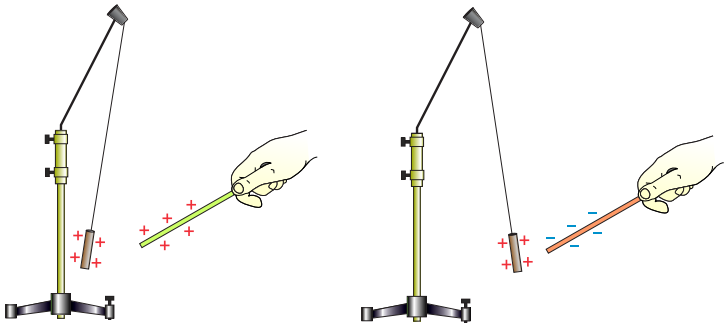
1. Заряды бывают двух знаков

   Заряды бывают двух типов: положительные и отрицательные.Это деление условно. Такое деление необходимо для объяснения притяжения и отталкивания. Существенным отличием электрического взаимодействия от гравитационного является то, что электрическое отталкивание существует, а гравитационного нет.

**Def.** Заряд полученный на стекле, трением о шелк назвали положительным.

**Def.** Заряд полученный на янтаре, трением о шерсть отрицательным.

Если наэлектризовать гильзу, коснувшись ее положительно заряженной стеклянной палочкой, то дальше положительно заряженная гильза будет отталкиваться от палочки. А если к ней поднести отрицательно заряженную эбонитовую палочку, то гильза к ней притянется. Следовательно на стеклянной и эбонитовой палочке образуются разные электрические заряды.

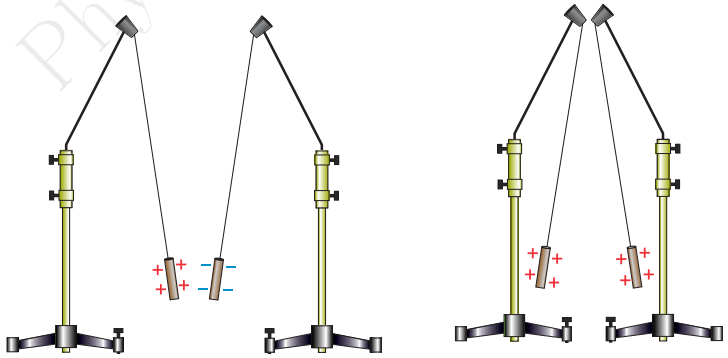


Также можно увидеть из этого опыта и сформулировать правило, по которому взаимодействуют заряды:

*Одноименные заряды отталкиваются, а разноименные - притягиваются.*

Это можно увидеть в эксперименте, с двумя гильзами. Если их зарядить одинаковыми по знаку зарядами, то они будут отталкиваться. А если разными, то притягиваться.

Physics.spb.ru



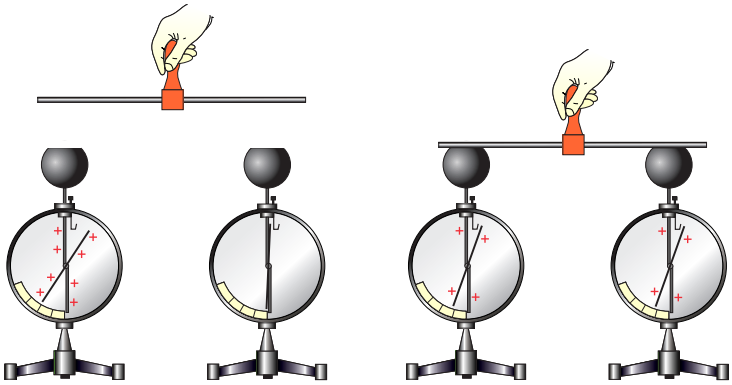
2. Заряд дискретен

   Иоганн Риттер в 1801 году высказал мысль о дискретной, зернистой структуре электричества.

   *Заряд дискретен, т.е. существует наименьший неделимый электрический заряд, причем у всех элементарных частиц он равен по величине заряду электрона.*

   Проведем мысленный эксперимент. Зарядим один электрометр и соединим его с незаряженным. В этом случае мы увидим, что заряд поделится пополам.

   Дальше один из электрометров разрядим, коснувшись его рукой и соединим их снова. Заряд снова поделится пополам.



Если бы электрометры были бы идеальными и могли показывать наличие сколь угодно меленького заряда, то в конце мы бы получили на одном из электрометров наименьший электрический заряд, который бы уже не удалось поделить пополам.

3. Заряд получают путем электризации

### 12.1.3 Определение заряда электрона.

Но зарядов без материальных носителей не существует. "... можно представить себе Чеширского кота без улыбки, но представить себе улыбку без кота. . . ."

С точки зрения МКТ вещество состоит из молекул, а те в свою очередь из атомов, которые являются электрически нейтральными. Однако, электрические взаимодействия свидетельствуют о наличии электрического заряда. При этом известно, что заряды без материальных носителей не существуют. Таким образом необходимо найти частицу обладающую минимальным электрическим зарядом.

В 1897 г. английский физик Джозеф Джон Томсон изучая катодные лучи экспериментально доказал существование частицы, которую назвали электроном. За это открытие Томсон в 1906 году получил Нобелевскую премию по физике.

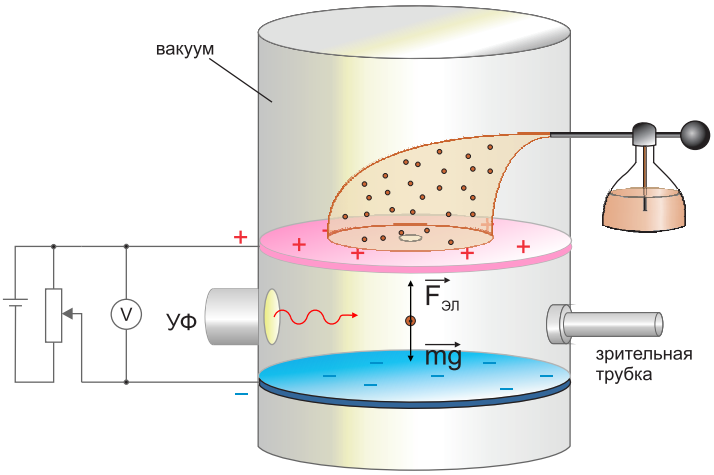
В 1911 г. Милликен и в 1912 г. Иоффе независимо провели эксперимент по определению заряда и массы электрона.

1. Цель опыта: дискретен ли заряд, определение предельного значения заряда и отождествление с частицей.

2. Установка

   Опыт проводился в вакууме. В процессе распрыскивания капельки масла электризуются за счет трения о трубку распылителям. В верхней пластине сделано отверстие и через него капля попадает в пространство между пластинами. На каплю действует сила тяжести, и чтобы капля могла зависнуть в воздухе

Physics.spb.ru




3. Законы, которые при этом использовались: сила тяжести, сила действующая на заряды в однородном электрическом поле, фотоэффект ( Ультрафиолет способен выбивать электроны с поверхности заряженного тела)

4. Результат Отрицательный заряд это неотъемлемое свойство электрона. Было установлено, что электрон обладает следующим зарядом:

$$\boxed{q_e = e = -1.6 \cdot 10^{-19}\text{Кл}}$$

### 12.1.4 Закон сохранения заряда:

**Law** ➡ ***Из опыта видно, что в электрически замкнутой системе(нет притока и оттока зарядов) алгебраическая сумма зарядов остается постоянной.***

Зная строение атома, этот закон достаточно легко объяснить. Например при электризации, заряды не рождаются а перераспределяются внутри электрически замкнутой системы.

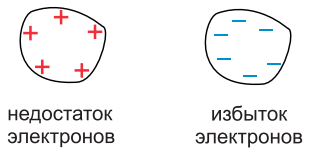
$$\boxed{\sum_i q_i = const}$$

### 12.1.5 Объяснение электризации тел.

Рассмотрим опыты по электризации тел и объясним их основываясь на строении атомов. Что означает, что тело электрически нейтрально? В нем количество электронов и протонов будет одинаковым, тогда алгебраическая сумма зарядов будет равной нулю. Так как носителями положительных зарядов являются протоны и они находятся в ядрах атомов, при электризации тел могут перемещаться только общие частицы для разных веществ, а именно электроны.

physics.spb.ru

Если тело заряжено положительно, это означает, что в нем присутствует недостаток электронов. Т.е. в процессе электризации у такого тела забрали часть электронов. А если тело заряжено отрицательно, это означает, что в нем присутствует избыток электронов, который тело приобрело в результате электризации.

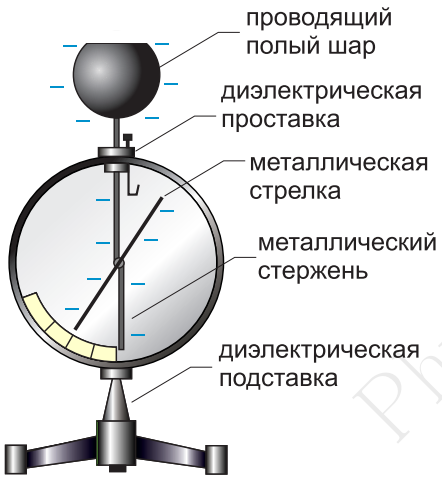



*В электризации всегда участвуют два тела. При этом оба электризуются.*

### 12.1.6 Устройство электрометра.

**Def.** Электрометр это прибор позволяющий определить наличие электрического заряда у тела.

Основные элементы электрометра: проводящий металлический полый шар, металлический стержень изолированный от корпуса и металлическая стрелка.




Стрелка может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. При этом она закреплена так, что ее центр тяжести находится ниже оси вращения. Это позволяет при отсутствии заряда на электрометре, возвращать стрелку в вертикальное положение, под действием силы тяжести.

Электрометр может показывать наличие заряда у тела при контакте (т.е. контактной электризации) и на расстоянии (т.е. в результате электростатической индукции). При контакте с заряженным телом, например отрицательно заряженным, часть электронов переходит на электрометр и распределяется по шару, стержню и стрелке. В результате стержень и стрелка получают одноименный заряд и начинают отталкиваться. Чем больше будет заряд, тем сильнее отталкивание и больше угол отклонения стрелки.

Если электрометра касаются положительно заряженным телом, то часть свободных электроном, находящихся на электрометре, притянутся к положительно заряженному телу и перейдут на него. В результате на электрометре образуется недостаток электронов и шар, стержень и стрелка электрометра приобретут суммарный положительный заряд. Дальше аналогично, в результате отталкивания одноименных зарядов, стрелка отклонится.

Случай, когда к электрометру подносят заряженное тело, но не касаются, будет рассмотрен в теме "Проводники в электрическом поле".

Physics.spb.ru

## 12.2 Закон Кулона

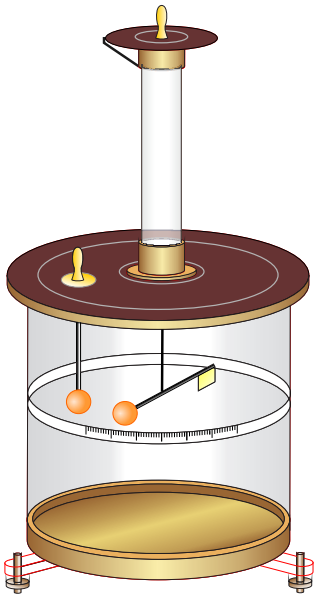
Закон взаимодействия неподвижных электрических зарядов был открыт в **1785 году** французским физиком и инженером Шарлем Огюстеном де Кулоном.

Кулон занимался исследованием кручения нитей и изобрел крутильные весы. С помощью крутильных весов и был открыт закон взаимодействия зарядов. Стоит отметить, что закон Кулона - фундаментальный физический закон и может быть установлен только опытным путем. Ни из каких других законов он не вытекает.

Открытие этого закона было было облегчено тем, что силы взаимодействия зарядов оказались велики (по сравнению с гравитационными). Здесь не нужно было применять особо чувствительной аппаратуры, как при измерении гравитационной постоянной Генри Кавендишем.

От чего будет зависеть сила взаимодействия заряженных шариков?

$$F = f(r, q_1, q_2, \text{эл. свойств среды})$$



Рассмотрим опыт к закону Кулона.

Крутильные весы Кулона состоят из стеклянной палочки, подвешенной на тонкой упругой проволочке. На одном конце палочки закреплен бузиновый позолоченный шарик, а на другом конце противовес. Еще один шарик закреплен неподвижно.

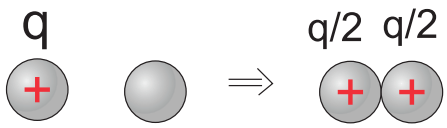
*В основе действия крутильных весов лежит деформация кручения, которая подчиняется закону Гука. В пределах упругости сила пропорциональна углу закручивания.*

Для того, чтобы установить зависимость от заряда, надо было уметь измерять заряд. А этого делать еще не умели.

1. $\begin{matrix} q_1 = const \\ q_2 = const \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad F \sim \dfrac{1}{R^2}$

2. $\begin{matrix} q_1 = const \\ R = const \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad F \sim q_2$

   Поскольку было неизвестно, как измерить заряд, Кулон предложил способ изменения заряда на известную величину. Если к заряженному телу, поднести такое же незаряженное, то заряд поделится пополам.




3. $\begin{matrix} R = const \\ q_2 = const \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad F \sim q_1$

$$\Rightarrow \quad F \sim \frac{q_1 \cdot q_2}{R^2}$$

4. А как зависит сила от среды? Понятно, что заряды в вакууме будут взаимодействовать не так, как в в какой-либо среде. Для характеристики среды вводится следующая величина:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{F_{vac}}{F_{cp}}}$$

**Def.** Относительная диэлектрическая проницаемость - физическая величина, характеризующая электрические свойства среды и показывающая, во сколько раз сила взаимодействия в вакууме больше чем в данной среде.

Для того, чтобы бы перейти от пропорциональной зависимости к равенству надо ввести коэффициент пропорциональности.

Система единиц СИ В международной системе единиц $k \neq 1$

$$F = k\frac{q_1 \cdot q_2}{\varepsilon R^2}$$

Для каких сил будет выполняться это соотношение? Здесь все очень похоже на закон всемирного тяготения.

*Закон Кулона выполнятся только для точечных зарядов.*

**Law** ➡ ***Закон Кулона.*** ***Сила электрического взаимодействия между двумя точечными неподвижными зарядами прямо пропорциональна произведению зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, зависит от электрических свойств среды и направлена по линии, соединяющей заряды.***

Единицы заряда:
В системе СИ: $q = I\Delta t$, 1 Кл = 1 А · 1 с

$$k = \frac{F\varepsilon R^2}{q_1 q_2}$$

$$[k] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$$

*Коэффициент пропорциональности показывает с какой силой взаимодействуют в вакууме два точечных заряда в 1 Кл на расстоянии 1 м друг от друга.*

Для того, чтобы основные уравнения электродинамики(уравнения Максвелла) была более простой, коэффициент $k$ принято записывать в следующем виде:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

*Величину $\varepsilon_0$ называют электрической постоянной*

$$\varepsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$$

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$$

Таким образом мы получили следующее выражение для закона Кулона:

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\varepsilon R^2}}$$

## 12.3 Электрическое поле

То, что вокруг тел, которые имеют заряд существует нечто особенное, люди догадывались давно. Проблема в том, что мы не можем это «нечто» осязать органами чувств.

В опыте с заряженной палочкой и гильзой, как быстро гильза «почувствует» приближение к ней заряженной палочки? Исторически, на этот вопрос, существовало два варианта ответа и соответственно две теории: *теория дальнодействия и теория близкодействия.*

physics.spb.ru

| ДАЛЬНОДЕЙСТВИЕ | БЛИЗКОДЕЙСТВИЕ |
|---|---|
| Ампер, Кулон, Лаплас, Гаусс | Фарадей, Ломоносов, Максвелл |
| Дальнодействие отрицало необходимость посредника для осуществления взаимодействия. Считали, что взаимодействие осуществляется мгновенно при любом расстоянии между телами. Что было вполне очевидным, если пронаблюдать электростатические опыты в лабораторных условиях при маленьких расстояниях. | В теории близкодействия считали, что взаимодействие осуществляется не мгновенно, на это нужно время. На маленьких расстояниях это будет очень маленькое, но не нулевое время. Так же считалось, что для осуществления взаимодействия необходим посредник - материальная среда. |

Рассмотрим мысленный эксперимент. Пусть в точках А и Б находятся заряды.

Они взаимодействуют с силой Кулона. Пусть заряд А начинает двигаться. Мгновенно ли будет это чувствовать заряд Б?. Нет заряд почувствует изменения силы через время $\Delta t = \frac{|AB|}{c}$. Начало движения заряда это движение с ускорением, как показал Максвелл, заряд движущийся с ускорением порождает волну, которая имеет ограниченную скорость распространения, равную скорости света.

Таким образом

**Def.** Электрическое поле - особый вид материи, существующий вокруг заряженных тел и осуществляющий их взаимодействие.

*Если заряженные тела неподвижны, то поле вокруг них называется электростатическим.*

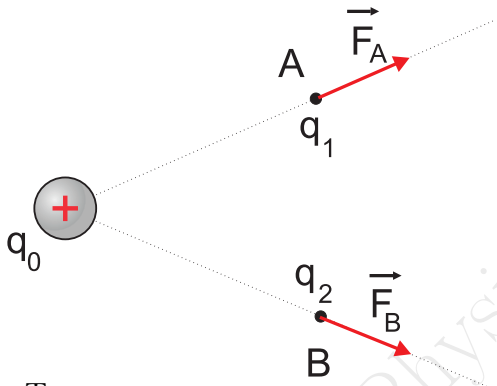
Почему поле можно считать особым видом материи?

- Поле существует вне зависимости от нас.
- Поле способно действовать на заряды с силой.
- Поле обладает энергией. Опыт по возбуждению неона в трубке электрическим полем. (Видеоэксперимент)
- Конечная скорость распространения

## 12.4 Напряженность электрического поля.

Из введенного определения поля ясно, что различные заряды создают различные поля. Как их определить?

Пусть электрическое поле создается неподвижным зарядом $q_0$. В поле этого заряда помещен другой заряд $q_1$ находящийся в точке $A$.




Если рассмотреть другой заряд $q_2$ помещенный в точку B, то на него естественно тоже действует сила со стороны заряда $q_0$.

Давайте увеличим заряд $q_1$ в два раза. Тогда сила $F_A$ тоже возрастет в 2 раза. Тогда

$$\frac{F_A}{q_1} = \frac{2F_A}{2q_1} = ... = const$$

$$\frac{F_B}{q_2} = \frac{2F_B}{2q_2} = ... = const$$

physics.spb.ru

Т.о. отношение силы к заряду в данной точке зависит только от внешнего поля, которое в этом примере задается зарядом $q_0$. Заряды $q_1, q_2$ принято называть пробными.

**Def.** Условились в качестве пробного заряда брать положительный и достаточно малый заряд, чтобы он своим полем не вызывал перераспределения заряда на теле, поле которого исследуется.

Отношение силы, действующей на пробный заряд, к величине этого заряда называется напряженностью поля.

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}} \qquad [E] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}$$

**Def.** Напряженность электрического поля в данной точке, это векторная величина, которая показывает с какой силой действует поле на единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля.

*Напряженность - силовая характеристика электрического поля.*

*Направление напряженности совпадает с направлением силы, действующей на пробный заряд, помещенный в данную точку поля.* NB!

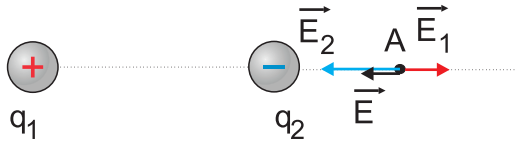
### 12.4.1 Поле точечного заряда.

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{\varepsilon R^2}; \quad E = \frac{F}{q} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{E_{\text{точ.заряда}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{\varepsilon R^2}}$$

### 12.4.2 Суперпозиция электрических полей.

Суперпозиция электрических полей вытекает из суперпозиции сил.




$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{q} = \frac{\vec{F}_1}{q} + \frac{\vec{F}_2}{q} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Если убрать заряд $q_2$, то $E_1$ в точке A не изменится. Т.е. поле заряда $q_2$ не действует на поле заряда $q_1$.

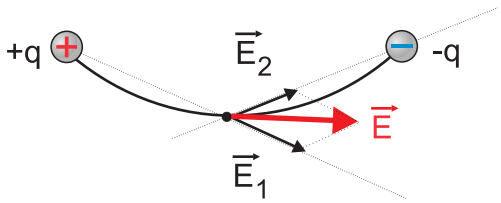
**Def.** Электростатические поля взаимопроницаемы, они не взаимодействуют друг с другом и действуют на заряженные тела вне зависимости от наличия или отсутствия других электрических полей.

$$\boxed{\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i}$$

## 12.5 Графическое изображение электрических полей.

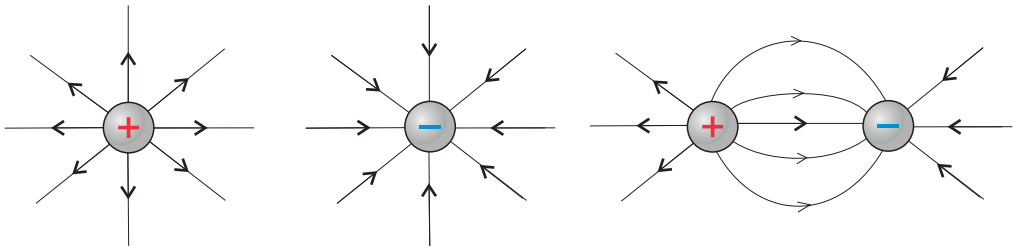
Электрическое поле никто не видел, но как-то необходимо его изображать на чертежах. Конечно, это можно сделать как угодно, но хотелось бы, чтобы рисунок физический смысл ситуации.

Как устанавливаются листочки? Оказывается, так что вектор напряженности в каждой точке направлен по касательной.



**Def.** Силовая линия - линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением напряженности в этой точке

Зарисуем примеры полей:



*Силовые линии не пересекаются, они начинаются на положительных зарядах, а заканчиваются на отрицательных или на бесконечности*

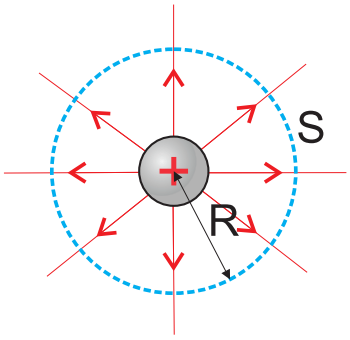
Что отличает в этом случае вид поля от предыдущих? В этом случае линии параллельны.

**Def.** Однородное поле - это электростатическое поле напряженность которого во всех точках одинакова по величине и направлению.

Что еще отражает картина силовых линий? Сколько линий надо проводить? Материальны ли они и сколько их? Почему проводим ограниченное число линий и с чем связано это число?

*Чем поле сильнее, тем силовые линии идут гуще. В однородном поле линии параллельны и густота их одинакова.*

Но сколько надо проводить линий? Рассмотрим точечный заряд:




$$E \sim \frac{1}{R^2}$$

Пусть мы нарисовали N силовых линий. Тогда через единицу площади проходит $\frac{N}{S}$ линий.

$$n = \frac{N}{S} = \frac{N}{4\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad E \sim n$$

Причем это число убывает так же, как напряженность с увеличением расстояния.

**Def.** Принято проводить через единицу площади, расположенную перпендикулярно силовым линиям, столько линий, каково в принятых единицах значение напряженности электрического поля в данной области.

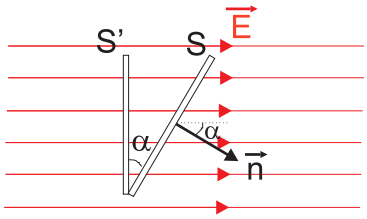
## 12.6 Теорема Гаусса

Мы рассмотрели, как можно рассчитать поле точечного заряда. Ясно, что не всегда заряд можно считать точечным. Даже в опыте с пластинами мы получаем поле, которое является однородным. Ответом на многие вопросы является теорема Гаусса.

### 12.6.1 Поток вектора напряженности

Предварительно введем такую величину, как поток вектора напряженности. Напряженность поля характеризует электрическое поле в точке пространства. Поток вектора напряженности зависит не от значения напряженности поля в данной точке, а от распределения поля по поверхности той или иной площади. Именно для этой величины формулируется теорема Гаусса.

**Def.** Нормалью к площадке называется единичный вектор, перпендикулярный этой площадке. Для замкнутой поверхности выбирается внешняя нормаль.




Из рисунка видно, что площадь S пересекает столько же линий, сколько их пересекает площадь $S'$, перпендикулярная полю.

$$\Rightarrow \quad \Phi = ES' = ES\cos\alpha, \quad \alpha = (\vec{n}, \vec{E})$$

Если ввести вектор поверхности, тогда

$$\boxed{\vec{S} = S\vec{n} \quad \Rightarrow \quad \Phi = (\vec{E}, \vec{S} = ES\cos\alpha)}$$

**Def.** Потоком вектора напряжённости через площадь называется произведение площади поверхности на проекцию напряженности электрического поля на нормаль к этой поверхности

Заметим, что поток может быть как положительным, так и отрицательным. Это зависит от величины угла $\alpha$.

*Если поверхность, через которую расчитывается поток, замкнутая, то для нее всегда берется внешняя нормаль.* NB!

Если поле неоднородно и поверхность произвольна, то поток определяется так. Всю поверхность надо разбить на малые элементы $\Delta S$, такие, что напряженность можно считать постоянной.

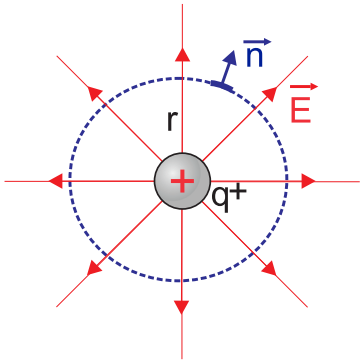
$$\Delta\Phi_i = E_i S_i \cos\alpha_i \quad \Rightarrow \quad \Phi = \sum_i \Delta\Phi_i$$

*Наглядно поток напряженности поля можно интерпретировать как величину, пропорциональную числу силовых линий пронизывающих данную поверхность.* NB!

$$E \sim n = \frac{N}{S}$$
$$\Rightarrow \quad \Phi = ES' = ES\cos\alpha \sim N$$

### 12.6.2 Теорема Гаусса для точечного заряда.

Теорема Гаусса устанавливает связь между потоком напряженности электрического поля через замкнутую поверхность и зарядом внутри этой поверхности.




Вначале рассмотрим частный случай, вычислим поток вектора напряженности в однородной среде через сферическую поверхность, в центре которой расположен точечный заряд $q$.

Напряженность поля в каждой точке на поверхности сферы одна и та же по модулю и проекция вектора напряженности на нормаль равна:

$$E_n = k\frac{q}{\varepsilon r^2} = const$$

Тогда поток вектора напряженности через поверхность сферы будет равен:

$$\Phi = \sum_i \Delta\Phi_i = \sum_i E_n \Delta S_i = E_n \sum_i \Delta S_i = E_n \cdot 4\pi r^2 = k\frac{q}{\varepsilon r^2} 4\pi r^2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

Если точечный заряд окружить поверхностью неправильной формы, то понятно, что ее будет "протыкать"столько же линий:

$$\boxed{\Phi = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}}$$

Physics.spb.ru

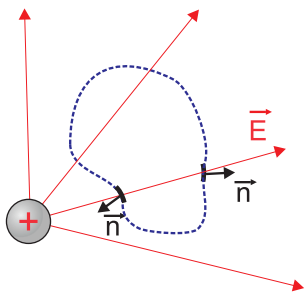
**Случай нескольких зарядов:**

Вследствие суперпозиции полей, полный поток равен сумме потоков от всех зарядов, поэтому суммируя выражения для потоков отдельных зарядов, получим полный поток:

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad \boxed{\Phi = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon\varepsilon_0}}$$

**Law** ➡ ***Теорема Гаусса.*** ***Поток вектора напряженности через любую замкнутую поверхность прямо пропорционален алгебраической сумме всех зарядов, заключенных внутри поверхности.***

Если замкнутая поверхность не содержит внутри себя электрического заряда, то поток вектора напряженности через нее равен нулю. Силовые линии, идущие от заряда, либо не пересекают ее совсем, либо пересекают четное число раз. При этом число линий, выходящих из поверхности, равно числу линий входящих в нее. Выходящие из поверхности линии вносят положительный вклад в поток, а входящие - отрицательный.



## 12.7 Применение теоремы Гаусса

### 12.7.1 Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.

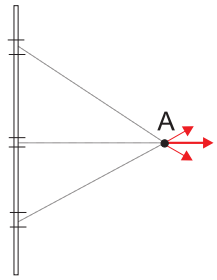
Рассмотрим поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.

Для оценки величины заряда на плоскости введем новую характеристику – поверхностную плотность заряда.

$$\boxed{\sigma = \frac{q}{S}}$$

**Def.** Поверхностной плотностью заряда называется величина, которая показывает, какой заряд приходится на единицу площади поверхности.

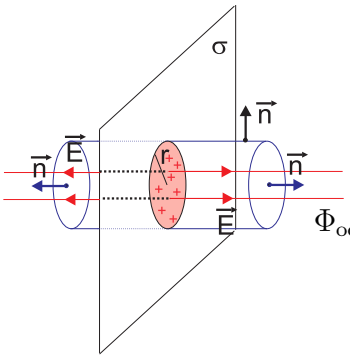
Рассмотрим равномерно заряженную плоскость, т.е. плоскость с постоянной поверхностной плотностью: $\sigma = const$




Как направлен вектор напряженности в точке A? Перпендикулярно плоскости. Для каждого кусочка найдется симметричный, действующий симметрично относительно перпендикуляра. Поэтому векторная сумма будет направлена по перпендикуляру.

Найдем чему будет равна величина вектора напряженности. Для этого воспользуемся теоремой Гаусса, выбрав в качестве замкнутой поверхности - цилиндр.

Поток вектора напряженности через цилиндр будет складываться из потока через два основания и боковую поверхность:




$$\Phi = 2\Phi_{\text{осн}} + \Phi_{\text{бок}}$$

$$\Phi_{\text{бок}} = 0, (\vec{n} \perp \vec{S})$$

$$\Phi_{\text{осн}} = E\pi r^2 (\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{E}) \qquad \Rightarrow \qquad \Phi = 2E\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$q = \sigma S = \sigma \pi r^2$$

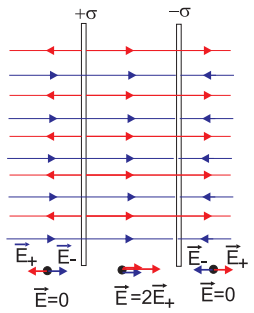
$$\Rightarrow \quad 2E\pi r^2 = \frac{\sigma \pi r^2}{\varepsilon\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}}$$

Из формулы видно, что напряженность не зависит от расстояния до плоскости, т.е. будет одинакова в любой точке полупространства. С другой стороны от пластины аналогично.

И так как при этом напряженность перпендикулярна плоскости, то во всех точках справа от пластины поле будет направлено в одну сторону. Поэтому равномерно заряженная бесконечная плоскость является источником однородного электростатического поля.

**St.** ➡ *Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости однородно и не зависит от расстояния до плоскости.*

### 12.7.2 Поле двух разноименных бесконечных равномерно заряженных плоскостей




Рассмотрим поле каждой плоскости. Поле положительно заряженной плстины будет направлено от нее, а поле отрицательно заряженной пластины будет направлено к ней. При это величины полей не зависят от расстояния до них.

Тогда, если поверхностные плотности зарядов на двух пластинах будут одинаковыми, получится

$$\begin{aligned} E_+ &= \frac{\sigma_+}{2\varepsilon\varepsilon_0} \\ E_- &= \frac{\sigma_-}{2\varepsilon\varepsilon_0} \\ \sigma_+ &= \sigma_- \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}}$$

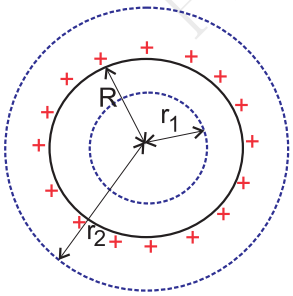
Если плоскости будут бесконечными или если пренебречь краевыми эффектами, то снаружи пластин, поля двух пластин будут компенсировать друг друга.

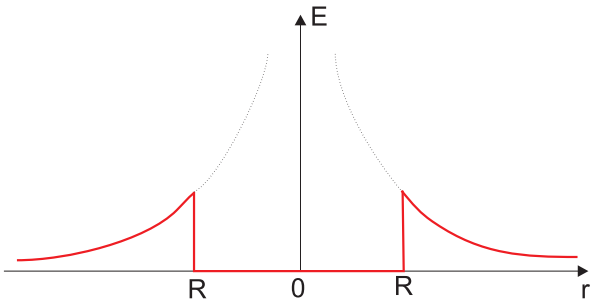
*Поле существует только между пластин и его величина в два раза больше поля одной пластины. Вне пластин поля нет.* NB!

### 12.7.3 Поле равномерно заряженной сферы

Рассмотрим поле заряженной сферы. Поток вектора напряженности через любую замкнутую поверхность внутри сферы равен нулю, так внутри сферы нет заряда. Следовательно напряженность поля внутри сферы будет равна нулю:

$$r_1 < R: \quad \Phi = E \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{q_{\text{внутр}}}{\varepsilon\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$$




Рассмотрим поле вне сферы. Из соображений симметрии ясно, что линии напряженности начинаются на поверхности сферы (если заряд положительный) и направлены как у точечного заряда:

$$r_2 > R: \quad \Phi = E \cdot 4\pi r_2^2 = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\varepsilon r^2}$$

Формула напряженности получается такой же, как и у точечного заряда.

**St.** ➡ ***Поле вне равномерно заряженной сферы такое же, как и поле точечного заряда помещенного в центр сферы. Поле внутри равномерно заряженной сферы отсутствует.***

Physics.spb.ru

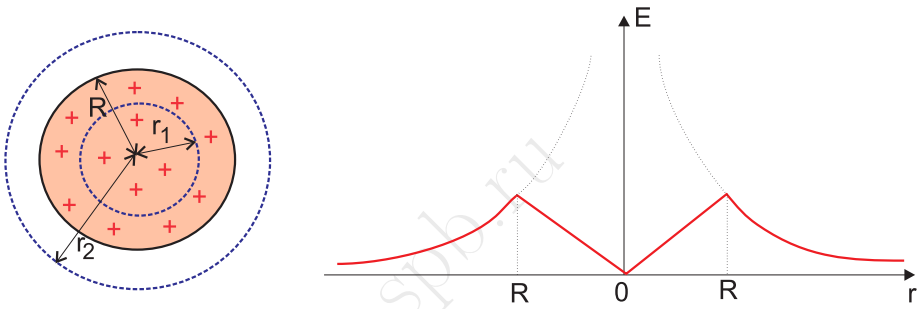
### 12.7.4 Поле равномерно заряженного шара

Для характеристики распределения заряда по объему используется понятие объемной плотности заряда.

**Def.** Объемной плотностью заряда называется отношение заряда к объему, в котором он распределен.

$$\alpha = \frac{q}{V}$$

Эта плотность может непрерывно изменяться внутри заряженного тела. Если заряд $q$ равномерно распределен по объему, то объемная плотность заряда постоянна.




Physics.spb.ru

Рассмотрим поле внутри сферы. Выбираем сферическую поверхность внтури шара и найдем поток вектора напряженности черз эту поверхность:

$$r_1 < R: \quad \Phi = E \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{q_{\text{внутр}}}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$q_{\text{внутр}} = \alpha V_1 = \alpha \frac{4}{3}\pi r_1^3$$

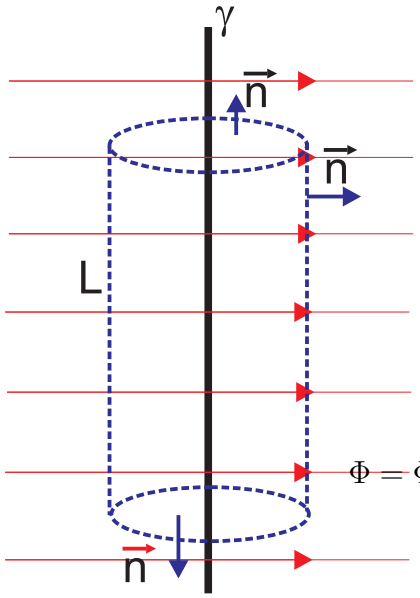
$$E 4\pi r_1^2 = \frac{\alpha \frac{4}{3}\pi r_1^3}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\alpha}{3\varepsilon\varepsilon_0} r_1}$$

Поле вне шара, рассчитывается также, как и в случае сферы.

$$r_2 > R: \quad \Phi = E \cdot 4\pi r_2^2 = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\varepsilon r^2}$$

**St.** ➡ *Поле равномерно заряженного по объему шара внутри этого шара линейно зависит от расстояния до центра шара и вне шара равно полю точечного заряда, помещенного в центр шара.*

### 12.7.5 Поле равномерно заряженной нити




Из симметрии следует, что силовые линии должны быть перпендикулярно нити.

$$\gamma = \frac{q}{l}$$

$$\Phi = \Phi_{\text{бок}} + 2\Phi_{\text{осн}} = \Phi_{\text{бок}}$$

$$\Phi_{\text{осн}} = 0$$

$$\Phi = \Phi_{\text{бок}} = ES_{\text{бок}} = E2\pi RL = \frac{q_{\text{внутр}}}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\gamma l}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\frac{\gamma}{\varepsilon R}}$$

St. ➡ ***Поле равномерно заряженной нити обратно пропорционально расстоянию до нее.***

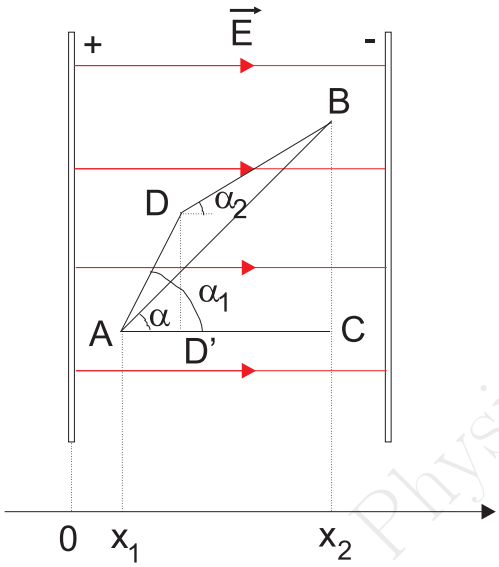
Physics.spb.ru

## 12.8 Работа электрического поля. Потенциальная энергия.

На примере опыта с неоновой трубкой, в которой газ светится во внешнем электрическом поле, можно увидеть, что электрическое поле обладает энергией и может совершать работу. Для поля энергия и работа является более удобными характеристиками, чем напряженность, т.к. они являются скалярами. Из механики помним, что решение с использованием закона сохранения энергии значительно короче, чем решение с использованием динамики и кинематики.

### 12.8.1 Работа в однородном поле.

Рассмотрим однородное поле двух разноименно заряженных пластин. Найдем работу, которую должно совершить поле по перемещению заряда $q$ из точки A в точку B.




Рассмотрим работу на участке AB:

$$A = FS\cos\alpha, \quad \alpha = const, F = const$$

$$A_{AB} = F|AB|\cos\alpha = F|AB|\frac{|AC|}{|AB|} = F|AC| =$$

$$= F(x_2 - x_1) = qE(x_2 - x_1)$$

Пусть теперь частиц перемещается по пути $ACB$:

$$A_{ACB} = A_{AC} + A_{CB} = F|AC|\cos 0 + F|CB|\cos 90^\circ =$$

$$= F|AC| = qE(x_2 - x_1)$$

И наконец рассмотрим работу, если частица перемещается по пути $ADB$:

$$A_{ADB} = A_{AD} + A_{DB} = F|AD|\cos\alpha_1 + F|DB|\cos\alpha_2 = F|AD|\frac{|AD'|}{|AD|} + F|DB|\frac{|CD'|}{|DB|} =$$

$$= F\left(|AD'| + |D'C|\right) = F|AC| = qE(x_2 - x_1)$$

Любую произвольную траекторию можно представить в виде ломанной состоящей из участков, где $\alpha = const$. Складывая все работы на каждом участке, получим:

$$\boxed{A = qE(x_2 - x_1)}$$

*Работа в однородном электростатическом поле не зависит от траектории, а определяется для данного поля и заряда, только начальной и конечной координатами.*

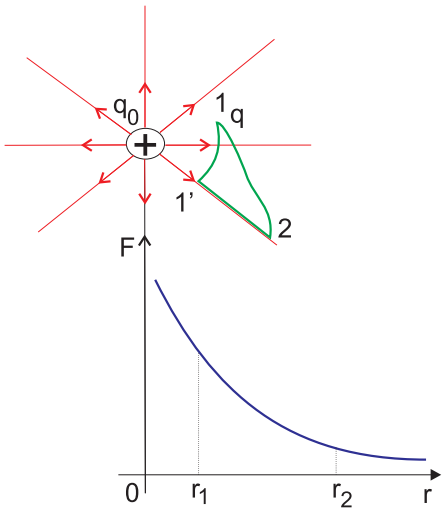
Physics.spb.ru

### 12.8.2 Работа в неоднородном поле

Рассмотрим теперь неоднородное поле на примере поля точечного заряда. Пусть под действием поля заряд переместился из точки 1 в точку 2. Как в этом случае найти работу? Так как сила не остается постоянной, то работу можно найти, как площадь под графиком сил в зависимости от расстояния до точечного заряда.

$$F = k\frac{q_0 q}{\varepsilon r^2}$$

Поскольку от вида траектории работа не зависит, переведем сначала заряд в точку 1', а потом в точку 2. На первом участке работа будет равна нулю, т.к. сила будет перпендикулярна перемещению. А на оставшемся участке:




$$A = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} F_i \Delta r_i = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr =$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} k\frac{q_0 q}{\varepsilon r^2}dr = k\frac{q_0 q}{\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = k\frac{q_0 q}{\varepsilon}\frac{1}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} = -k\frac{q_0 q}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

В данном случае поле совершает положительную работу, т.к.

$$r_2 > r_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_2} < \frac{1}{r_1} \quad \Rightarrow \quad A > 0$$

*Работа в неоднородном поле так же не зависит от траектории.*

Можно сделать предположение, что и в случае произвольных электростатических полей это свойство сохранится. Произвольное поле можно разбить маленькие области, в которых поле можно считать однородным. И просуммировав работу на большом участке через работы на меленьких областях, получится такой же результат - не зависит от траектории.

**St.** ➡ *Работа электростатического поля не зависит от формы траектории, а определяется начальными и конечными координатами вдоль силовой линии, напряженностью поля и величиной помещенного в него заряда.*

**St.** ➡ *Электростатическое поле является потенциальным, а сила электрического взаимодействия - консервативной.*

Physics.spb.ru

### 12.8.3 Потенциальная энергия

**Def.** Потенциальная энергия показывает, какую работу совершило бы поле переместив заряд из данной точки в точку, условно принятую за нулевую.

В случае однородного поля, выбираем ноль потенциальной энергии на пластине с координатой $x = 0$, тогда воспользовавшись теоремой о потенциальной энергии получим

$$A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2 = qE(x_2 - x_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Pi = -qEx}$$

Последняя формула сильной напоминает выражение для потенциальной энергии тела в однородном гравитационном поле Земли

$$E_p = mgh$$

Действительно, если заряд это аналог массы, а напряженность аналог ускорения свободного падения, то мы получим туже формулу, знак же будет зависеть от выбора начала отсчета потенциальной энергии.

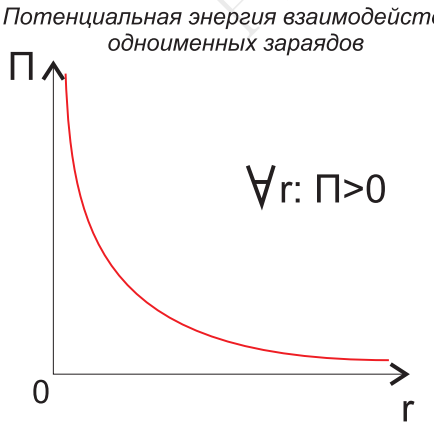
В неоднородном поле будет другое выражение:

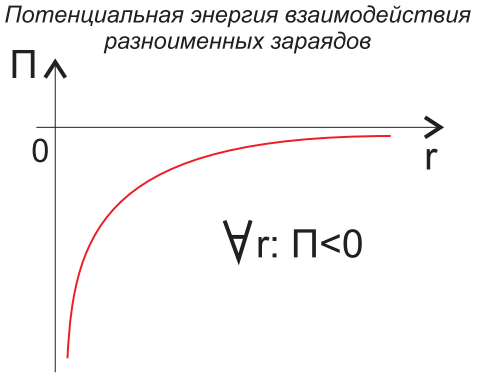
$$A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2 = -k\frac{q_0 q}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Pi = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r} + C}$$

Поскольку потенциальная энергия определена с точностью до константы, необходимо выбрать общее начало отсчета энергии. Будем считать, что

$$\Pi_{r\to\infty} \to 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Pi = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r}}$$

Physics.spb.ru




Рассмотрим случаи одноименных и разноименных зарядов. В обоих случаях обычно ноль потенциальной энергии взаимодействия выбирается при $r \to \infty$. При этом для одноименных зарядов потенциальная энергия будет положительной, т.к. при перемещении одного из зарядов с данного расстояния на бесконечность, электрическое поле будет совершать положительную работу. А в случае разноименных зарядов - отрицательную. Поэтому для разноименных зарядов потенциальная энергия взаимодействия будет всегда отрицательной и этот случай аналогичен потенциальной энергии гравитационного взаимодействия, т.к. это тоже взаимодействие притяжения.

### 12.8.4 Потенциальная энергия системы точечных зарядов

Если есть система точечных зарядов, то для расчета потенциальной энергии такой системы нужно попарно рассчитать энергию взаимодействия и учесть, что заряды сами с собой не взаимодействуют.

Тогда получится следующая формула:

$$\boxed{\Pi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1,k\neq j}^{N}\frac{kq_iq_j}{\varepsilon r_{ij}}}$$

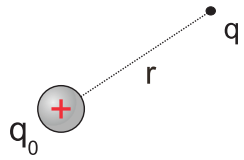
Physics.spb.ru

## 12.9 Потенциал. Разность потенциалов.

Рассмотрим поле положительного заряда. Мы уже ввели одну характеристику поля, а именно напряженность. Но эта величина не удобна тем, что я является векторной величиной.

Введем теперь энергетическую характеристику поля:

$$\varphi = \frac{\Pi}{q}$$



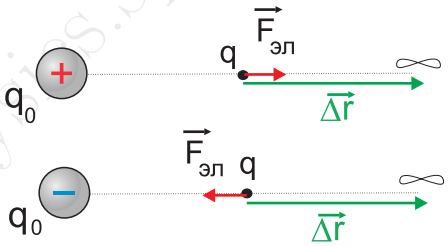

**Def.** Потенциалом поля в данной точке называется скалярная физическая величина, которая показывает, какой потенциальной энергией обладал бы единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля.

Стоит обратить внимание, что единичный положительный заряд, надо мысленно поместить в данную точку поля.

Тогда получаем, что

**Знак потенциала**

Physics.spb.ru




$$\varphi_1 = \frac{\Pi_1}{q} = \frac{A_{1\infty}}{q} > 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 > 0$$

$$\varphi_1 = \frac{\Pi_1}{q} = \frac{A_{1\infty}}{q} < 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 < 0$$

**St.** ➡ *Потенциалы всех точек поля, созданных положительным зарядом - положительны, а отрицательным - отрицательны.*

**потенциал в однородном поле**

$$E = const, \Pi = -qEx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = -Ex}$$

**потециал поля точечного заряда**

$$E \neq const, \Pi = k\frac{q_1 q_0}{\varepsilon r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = k\frac{q_0}{\varepsilon r}}$$

Поскольку потенциальная энергия стремится к нулю н абесконечности, то и потенциал будет уменьшаться при стремлении к бесконечности:

$$r \to \infty \varphi \to 0$$

*В теоретической физике за точку, в которой потенциал равен нулю, принимают бесконечно удаленную точку. В практической радиоэлектронике - поверхность Земли, на самолетах - корпус самолета.*

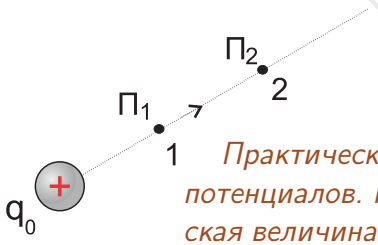
**потенциал поля произвольной системы** Из суперпозиции полей следует, что *потенциал поля произвольной системы есть алгебраическая сумма потенциалов отдельных полей.*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i$$

*Таким образом, потенциал зависит от выбора точки нулевого отсчета, т.е. эта величина относительная.* NB!

Physics.spb.ru

### 12.9.1 Разность потенциалов




$$A_{эл} = -(\Pi_2 - \Pi_1) = -q(\varphi_2 - \varphi_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{A_{эл}}{q}}$$

NB!

*Практический смысл имеет не сам потенциал, а разность потенциалов. Разность потенциалов - это скалярная физическая величина, являющаяся энергетической характеристикой поля.*

**Def.** Разность потенциалов показывает, какую работу совершает электрическое поле перемещая единичный положительный заряд между двумя данными точками.

Поведение зарядов определяется не потенциалом, а разностью потенциалов.

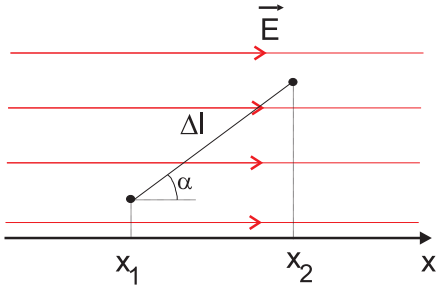
Единицы измерения: $[\Delta\varphi] = B$(Вольт)

$$1B = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}$$

**Def.** 1В - это разность потенциалов таких двух точек поля, для перемещения между которыми единичного положительного заряда, поле совершает работу в 1 Дж

## 12.10 Связь между напряженностью и разностью потенциалов

Работа поля при малом перемещении $\Delta l$ заряда $q$ равна:




$$A = qE\Delta l \cos\alpha = qE\Delta x$$

где $\alpha$ - угол между векторами напряженности и перемещением. Перемещение должно быть настолько малым, чтобы значение напряженности можно было считать постоянным, на все перемещении.

С другой стороны:

$$\Delta\varphi = -\frac{A}{q} \quad \Rightarrow \quad A = -q\Delta\varphi$$

Приравнивая выражения получим:

$$E\Delta x = -\Delta\varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_x = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}}$$

**Def.** Напряженность поля показывает какая разность потенциалов приходится на единицу длины силовой линии

Аналогичные выражения можно написать, для проекции напряженности поля на другие оси координат.

Из полученной формулы легко заметить, что *Если потенциал не меняется от точки к точке, то напряженность поля должна быть равна нулю, т.е. поле отсутствует*

Что означает знак минус в полученной формуле?

**St.** ➡ ***Напряженность электростатического поля направлена в сторону убывания потенциала.***

Единицы измерения напряженности:

Как уже говорилось, напряженность можно измерять в Ньютонах на Кулон, полученная формула дает следующее выражение:

$$[E] = \frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл м}} = \frac{\text{Н м}}{\text{Кл м}} = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}$$

**Def.** Напряженность поля равна единице, если разность потенциалов между двумя точками на расстоянии 1 м вдоль силовой линии в однородном поле равна 1 В.

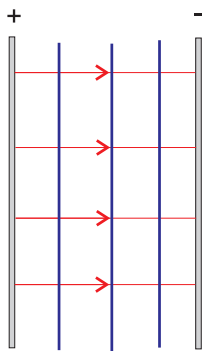
physics.spb.ru

## 12.11 Эквипотенциальные поверхности

**Def.** Эквипотенциальные поверхности - геометрическое место точек, обладающих одинаковым потенциалом

С помощью эквипотенциальной поверхности можно изобразить электростатические поля, как мы это делаем с помощью силовых линий.

Однородное поле: $\vec{E} = const$




$$\varphi = -Ex, \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi = -\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}x}$$

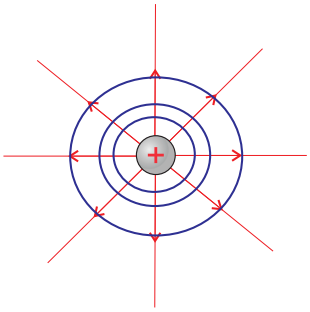
Для всех точек с одинаковыми координатами x - потенциал одинаковый. Следовательно

Однородное электростатическое поле можно изобразить в виде параллельных ЭП, перпендикулярных силовым линиям.

Как часто надо проводить ЭП?

*Чем поле сильнее, тем эквипотенциальные поверхности идут гуще. Для однородного опля они идут параллельно друг другу и на одинаковом расстоянии.*

Неоднородное поле




$$\vec{E} \neq const$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r}$$

Точки с одинаковым потенциалом лежат на сферах. Следовательно

*Поле точечного заряда можно изобразить в виде концентрических сфер*

Как взаимно расположены силовые линии и эквипотенциальные поверхности?

**St.** ➡ *Силовые линии всегда перпендикулярны эквипотенциальной поверхности.*

Доказательство: предположим, что частица движется вдоль эквипотенциальной поверхности. Совершает ли поле работу?

$$A = -q\Delta\varphi = 0 = F\Delta S\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90^\circ$$

Следовательно вдоль любого участка ЭП сила, а следовательно и напряженность перпендикулярны ЭП.

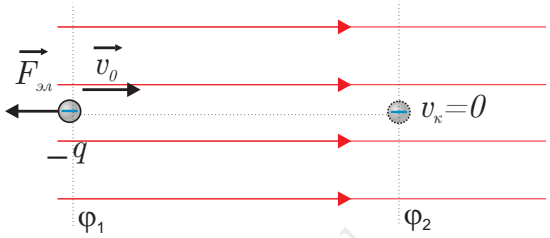
Physics.spb.ru

## 12.12 Движение частиц в электростатических полях

При рассмотрении движения частиц в электростатических полях, чаще всего встречаются два вида задач: в первом случае частица движется параллельно силовым линиям, а во втором случае, частица движется в однородном поле не параллельно силовым линиям. Рассмотрим последовательно эти случаи.

Движение в однородном поле вдоль силовых линий

Электрон вылетает из точки, потенциал которой 600 В, со скоростью $12 \cdot 10^6$ м/с в направлении силовых линий поля. Определить потенциал точки, дойдя до которой электрон остановится. Какой путь при этом будет пройден, если напряженность поля равна 500 В/м.




Будем решать задачу в лабораторной системе отсчета, в которой дана начальная скорость электрона. Она является инерциальной, это позволит нам использовать второй закон Ньютона и найти ускорение электрона:

$$\vec{F}_{эл} = m_e\vec{a} \quad \Rightarrow \quad F_{эл} = m_e a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_{эл}}{m_e} = \frac{qE}{m_e}$$

Найдем путь электрона до остановки.

$$S = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2 m_e}{2|q|E} = \frac{144 \cdot 10^{12}\text{м}^2/c^2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}\text{кг}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\text{Кл} \cdot 500\text{В/м}} = 0,82\text{м}$$

Теперь определим потенциал в точке остановки. Поскольку в системе отсутствуют диссипативные силы и внешние силы, то для электрона можно записать закон сохранения энергии:

$$q_e\varphi_1 + \frac{m_e v_0^2}{2} = q_e\varphi_2 + 0$$

Тогда

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{m_e v_0^2}{2q_e} = 600\text{В} + \frac{9,1 \cdot 10^{-31}\text{кг} \cdot 144 \cdot 10^{12}\text{м}^2/c^2}{-2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\text{Кл}} = 600\text{В} - 409,5\text{В} = 190,5\text{В}$$

Потенциал $\varphi_2$ получился меньше $\varphi_1$, т.к. поле направлено в сторону уменьшения потенциала.

Часто в таких задачах можно столкнуться с единицей измерения энергии электрон-вольт:

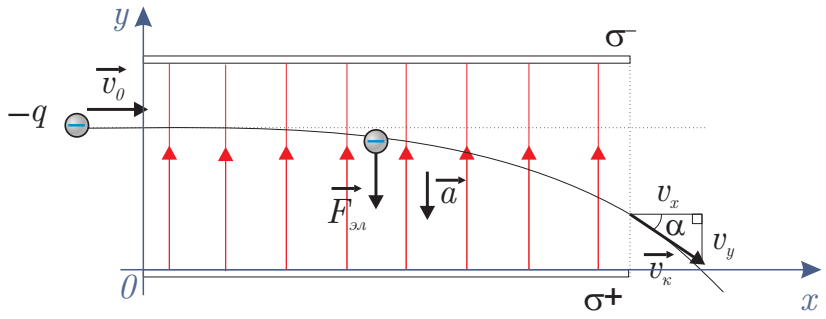
**Def.** 1 эВ - энергия, которую приобретает электрон, пройдя разность потенциалов в 1В.

По величине 1 электрон-вольт будет равен:

$$1\text{эВ} = |q_e|\Delta\varphi = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{Кл} \cdot 1\text{В} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{Дж}$$

Движение в однородном поле перпендикулярно силовым линиям

Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $v = 1,8 \cdot 10^7$ м/с . Напряженность поля в конденсаторе $E = 100$ В/см, длина конденсатора $l = 10$ см. Найти величину и направление скорости электрона перед вылетом его из конденсатора.




Будем решать задачу в лабораторной системе отсчета, в которой дана начальная скорость электрона. Она является инерциальной, это позволит нам использовать второй закон Ньютона и найти ускорение электрона:

$$\vec{F}_{эл} = m_e\vec{a} \quad \Rightarrow \quad F_{эл} = m_e a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_{эл}}{m_e} = \frac{q_e E}{m_e} = const$$

Ускорение будет сонаправленно с силовыми линиями электростатического поля. Поэтому в вдоль пластин движение будет равномерным, а вдоль силовых линий – равноускоренным. Это полностью аналогично движению тела, брошенного горизонтально в однородном гравитационном поле.

Поскольку движение происходит с постоянным ускорением, запишем векторные уравнения равнопеременного движения и спроецируем их на координатные оси:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{at^2}{2} \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = -at \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} l = v_0 t_п \quad \Rightarrow \quad t_п = \frac{l}{v_0} \\ v_{кх} = v_x(п) = v_0 \\ v_{ку} = v_y(п) = -at_п = -\frac{q_e E}{m_e} \cdot \frac{l}{v_0} \end{cases}$$

Тогда величина скорости в момент вылета будет равна:

$$v_k = \sqrt{v_{кх}^2 + v_{ку}^2} = \sqrt{v_0^2 + \left(-\frac{q_e E}{m_e} \cdot \frac{l}{v_0}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(1,8)^2 \cdot 10^{14}\ м^2/с^2 + \left(\frac{1,6 \cdot 10^{-19}\ Кл \cdot 10^4\ В/м \cdot 0,1\ м}{9,1 \cdot 10^{-31}\ кг \cdot 1,8 \cdot 10^7\ м/с}\right)^2} = 2 \cdot 10^7\ м/с$$

а ее направление:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|v_{ку}|}{|v_{кх}|} = \frac{q_e E l}{m_e v_0^2} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}\ Кл \cdot 10^4\ В/м \cdot 0,1\ м}{9,1 \cdot 10^{-31}\ кг \cdot (1,8)^2 \cdot 10^{14}\ м^2/с^2} = 0,54 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 28,5^\circ$$

## 12.13 Проводники в электрическом поле

**Def.** Проводниками называются вещества, которые имеют свободные заряженные частицы, в концентрации достаточной для пропускания через себя существенного электрического заряда.

Концентрация свободных заряженных частиц в проводниках достигает

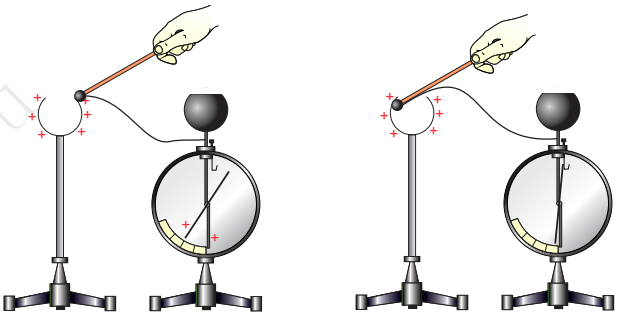
$$n \approx 10^{21 \div 23} \text{см}^{-3}$$

При этом свободными заряженными частицами являются электроны. При такой концентрации свободных зарядов, проводники обладают целым набором свойств, которые отличаются от диэлектриков и полупроводников.

Распределение зарядов на проводнике

Демонстрация: электрометр, палочка

*Заряды располагаются на проводнике не по всему объему, а только на поверхности.*

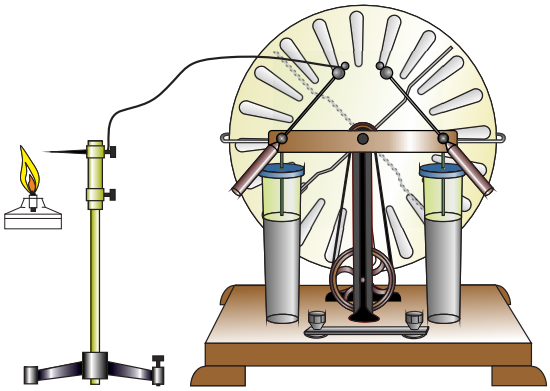


Как это можно объяснить: одноименные заряды отталкиваясь друг от друга, стараются удалиться как можно дальше, т.е. свободные заряды будут сосредоточены на поверхности.

Демонстрация: конус, палочка, электрометр, свечка, вертушка, ученик+машина

Если поверхность проводника имеет острые выступающие части, то заряды старясь удалиться от поверхности и друг от друга как можно дальше, будут скапливаться на этих острых и выступающих частях и при определенной величине стекать с проводника.

Опыт по стеканию зарядов с проводника: (Видеоэксперимент)

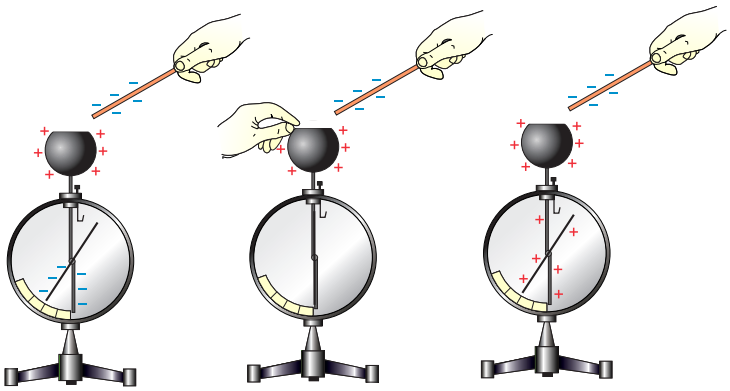


Следовательно

$$\sigma = \frac{q}{S} \neq const \quad \sigma = f(\vec{r})$$

*Заряды на проводниках распределяются неравномерно, чем меньше радиус кривизны поверхности проводника (т.е. чем острее), тем больший заряд будет скапливаться на данном участке проводника..*

Электростатическая индукция:

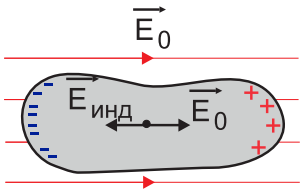


Демонстрация: подносим заряженную палочку к электрометру, электрометр показывает заряд, хотя палочкой его не касались.

**Def.** Возникновение разноименных зарядов на поверхности проводника, помещенного в электрическое поле, называют электростатической индукцией. Заряды возникающие таким образом называют индуцированными или наведенными.

Электрическое поле внутри проводника

Рассмотрим однородное поле с напряженностью $\vec{E}_0$. Поместим в это поле проводник. В результате, под действием электрического поля, свободные заряды перераспределятся. Причем этот процесс будет идти до тех пор, пока поле внутри проводника не станет равным нулю.

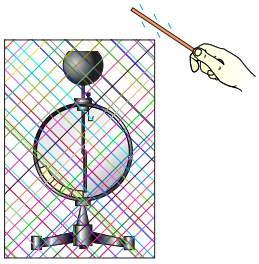



$$\vec{E}_{ind} + \vec{E}_0 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad E_0 = E_{ind}$$

Внешние поле будет скомпенсировано индуцированным полем перераспределенных зарядов. Если бы это было не так, то свободные заряды перемещались в определенном направлении, т.е. протекал бы ток, т.е. мы получили бы вечный двигатель.

Электростатическая защита

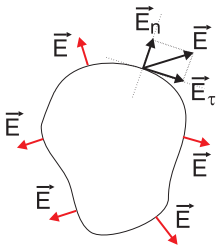
Демонстрация: электрометр внутри сетки не реагирует на заряженную палочку.



Чтобы защитить тело от воздействия внешних электростатических полей, использую электростатическую защиту. Возьмем металлическую сетку. Внутри сетки поле отсутствует, поэтому тело помещенное внутрь этой сетки будет защищено от внешних полей.

Направление силовых линий

(Видеоэксперимент)




*Если заряды находятся в равновесии, то силовые линии перпендикулярны поверхности проводника.*

Если бы это было не так, то

$$\vec{E} = \vec{E}_n + \vec{E}_\tau$$

И под действием тангенциальной составляющей заряды перемещались бы по поверхности, а мы знаем, что это не так.

Потенциал проводника

*Все точки заряженного проводника имеют одинаковый потенциал, при условии равновесия зарядов.*

- Внутри проводника: $E = 0 \quad \Rightarrow$

$$A = qE\Delta S\cos\alpha = 0$$
$$A = -q\Delta\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi_1 = \varphi_2 = const}$$

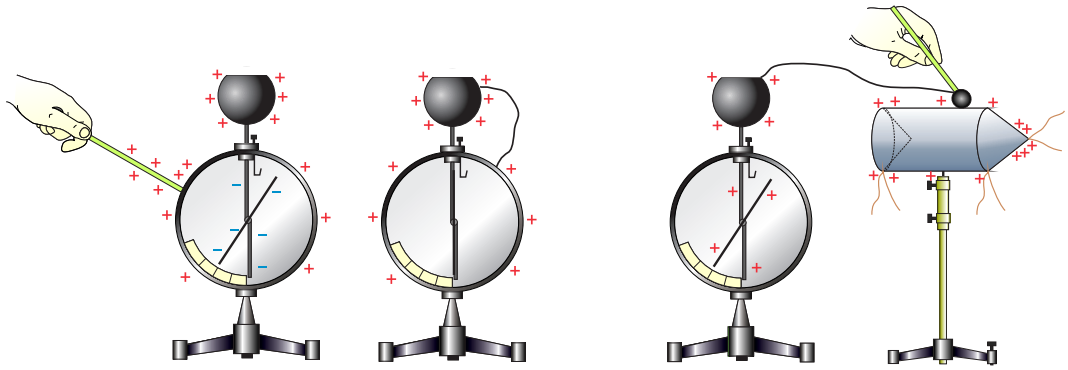
*В любой точке заряженного проводника потенциалы равны*

- На поверхности: $E \neq 0, E \perp \Delta S \quad \Rightarrow$

$$\Delta S \neq= 0, \quad A = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = 0$$

Измерение разности потенциалов

**Def.** Электрометр - прибор, позволяющий измерить разность потенциалов между корпусом и шаром



Для измерения разности потенциалов между двумя проводниками один из них присоединяют к стержню электрометра, а другой к корпусу. Если необходимо измерить потенциал относительно Земли, то корпус заземляют.

Электрическое поле внутри электрометра зависит только от разности потенциалов, так внешнее электростатическое поле не проникает сквозь металлический корпус прибора. Поле же однозначно определяет силы, действующие на стрелку.

## 12.14 Диэлектрики

**Def.** Диэлектрики – это вещества не способные пропускать через себя электрический заряд.

Связано это с тем, что концентрация свободных зарядов в диэлектрике не превышает

$$n < 10^8 \text{ см}^{-3}$$

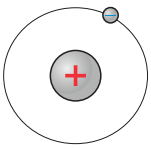
Их электрически свойства отличаются от свойств проводников. Поведение диэлектриков во внешнем электростатическом поле связно с их отличием во внутреннем строении.

Все диэлектрики можно разделить на два класса:

**Полярные** Полярные диэлектрики, состоят из молекул, у которых центры распределения положительных и отрицательных зарядов не совпадают. Пример: спирты, вода

**Неполярные** Неполярные диэлектрики, состоят из молекул у которых эти центры совпадают. Пример: инертные газы, кислород, водород, полиэтилен.

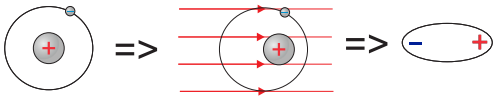
Physics.spb.ru




Поляризация неполярных диэлектриков

Демонстрация: лепестки султана притягиваются к наэлектризованной палочке, линейка вращается на лампе, диэлектрик в конденсаторе

Таким образом опыт показывает, что *Диэлектрики притягиваются к наэлектризованным телам*.




Как это можно объяснить? При внесении диэлектрика в поле на отрицательно и положительно заряженные частицы начинают действовать силы, направленные в противоположенные стороны. В результате молекула растягивается и происходит смещение центров положительного и отрицательного зарядов. Молекула становится диполем, ось которого направлена вдоль поля.

*При поляризации диэлектриков на его поверхности возникают разноименные связанные заряды.*

Поляризация атомов в диэлектриках подразделяется:

1. электронную - смещение электронов относительно ядра($CO_2$)
2. ионную - смещение ионов в ионных кристаллах(NaCl)

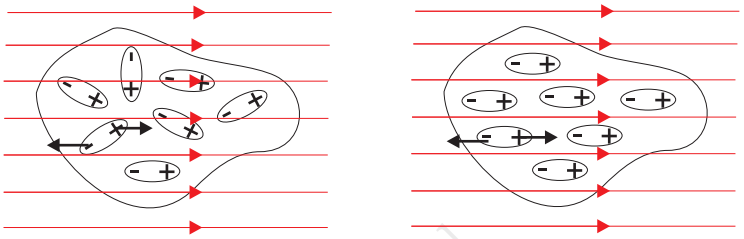
3. атомную - смещение электронов участвующих в ковалентных связях в молекуле

Таким образом неполярный диэлектрик в электрическом поле становится полярным и в дальнейшем можно рассматривать только полярные диэлектрики.

Поляризация полярных диэлектриков

В отсутствии внешнего поля, диполи молекул ориентированы хаотично, вследствие этого во всех участках диэлектрика электрические поля диполей компенсируют друг друга.

Если поместить полярный диэлектрик во внешнее электрическое поле, то на на диполь будет действовать сила, которая будет поворачивать его, так чтобы диполь был расположен вдоль поля.

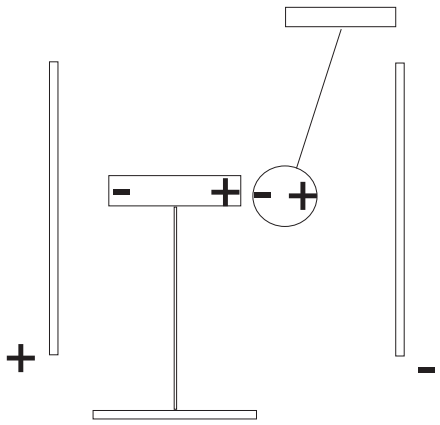


Но этому процессу будет препятствовать тепловое движение. В результате полная ориентация может быть достигнута лишь при сильных полях и температурах, близких к абсолютному нулю. В обычных условиях в среднем число диполей, ориентированных вдоль поля, больше чем, против поля.

В результате на поверхности диэлектрика появляется поверхностный связанный заряд с определенной поверхностной плотностью. Внутри диэлектрика отрицательные и положительные заряды диполей компенсируют друг друга и средний электрический заряд равен нулю.

Демонстрация:

Основное отличие от проводников заключается в том, что индуцированные заряды не могут свободно перемещаться по диэлектрику.

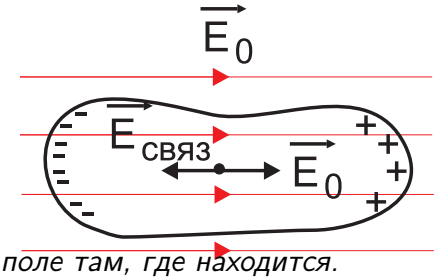


Шарик будет совершать колебания, если между конденсаторами находится проводник, а если диэлектрический - нет, т.к. шарик не сможет снять заряд с диэлектрика( на нем заряд не свободный).

Поле внутри диэлектрика:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{связ}}$$

$$E = E_0 - E_{\text{связ}}$$




*В результате возникновения поляризованных(связанных) зарядов поле в диэлектрике ослабляется. Диэлектрик ослабляет поле там, где находится.*

$$\varepsilon = \frac{F_{vac}}{F} = \frac{qE_0}{qE} = \frac{E_0}{E}$$

Пробой диэлектрика

Если диэлектрик поместить в электрическое поле, то заряды в молекулах отодвигаются друг от друга и молекулы растягиваются. В очень сильных полях молекула может разрушиться. Электроны станут свободными и двигаясь внутри диэлектрика будут разрушать другие молекулы, т.е. будет происходить разрушение кристаллической решетки.

*Наименьшая напряженность при которой происходит пробой диэлектриков называется электрической прочностью:*

Воздух - 30 кВ/см, Стекло - 1 МВ/см.

*Вещества обладающие очень большой диэлектрической проницаемостью называются сегнетоэлектриками ($\varepsilon \sim 1000$)*

Physics.spb.ru

## 12.15 Обобщение по электрическому поля

| **Силовые характеристики** | **Энергетические характеристики** |
|---|---|
| Сила взаимодействия<br>$$F = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}$$<br>- для точечных зарядов<br>Силы центральные | Работа силы. Потенциальная энергия<br>1. Однородное поле<br>$$A = qE\Delta x \qquad \Pi = -qEx$$<br>2. Неоднородное поле<br>$$A = -\left(k\frac{q_1 q_2}{r_2} - k\frac{q_1 q_2}{r_1}\right); \qquad \Pi = k\frac{q_1 q_2}{r}$$<br>Поле потенциально |
| Напряженность<br>$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$<br>Зависит ли от F и q?<br>1. Точечный заряд $E = k\frac{Q}{\varepsilon r^2}$<br>2. Плоскость $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$<br>$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$ | Потенциал<br>$$\varphi = \frac{\Pi}{q}$$<br>Зависит ли от П и q?<br>1. Точечный заряд $\varphi = k\frac{Q}{\varepsilon r} + C$<br>2. Плоскость $\varphi = -Ex + C$<br>$$\varphi = \sum_i \varphi_i$$ |
| Проводники в электростатическом поле | |
| Внутри $E = 0$, снаружи поле проводник не меняет<br>Заряженная сфера R,q<br>$$r < R \quad \Rightarrow \quad E = 0$$<br>$$r > R \quad \Rightarrow \quad E = k\frac{q}{r^2}$$ | Внутри $\varphi = const$, вплоть до поверхности<br>Заряженная сфера R,q<br>$$r \leqslant R \quad \Rightarrow \quad \varphi = k\frac{q}{R} = const$$<br>$$r > R \quad \Rightarrow \quad \varphi = k\frac{q}{r}$$ |
| Диэлектрики в электростатическом поле | |
| Внутри $E = \frac{E_0}{\varepsilon}$ | Внутри $\varphi = \frac{\varphi_0}{\varepsilon}$ |
| Снаружи диэлектрик поле не изменяет. | |

physics.spb.ru

## 12.16 Электроемкость уединенного проводника

Рассмотрим следующий эксперимент: (Видеоэксперимент).

Будем сообщать одинаковый заряд различным телам, различной формы и объема. В этом случае можно увидеть, что потенциалы одного тела будет отличаться от потенциала другого, несмотря на одинаковый заряд.

Отношение заряда проводника к его потенциалу не зависит от значения заряда и определяется только лишь формой и размером проводника и электрическими свойствами окружающей среды.

Это позволяет ввести понятие электрической емкости:

$$\boxed{C = \frac{q}{\varphi}}$$

**Def.** Электроемкость показывает, какой заряд необходимо сообщить проводнику, чтобы его потенциал стал равен 1 В

*Электроемкость зависит от геометрической формы и размеров проводника и от его окружения.*

*Емкость не зависит от материала проводника: железные, медные тела и тела из других материалов одинаковых форм и размеров будут иметь одинаковую электроемкость.*

Термин "электрическая емкость"возник по аналогии с емкостью сосуда. Чем больше емкость проводника, тем меньше меняется его потенциал пр сообщении заряда. Точно так же, чем больше объем сосуда и больше площадь сечения сосуда, тем меньше меняется уровень жидкости при добавлении жидкости.

Демонстрация: поднесем руку к заряженному электрометру, стрелка покажет меньшее значение, следовательно $\varphi \downarrow \quad \Rightarrow \quad c \uparrow$. Незаряженные тела влияют на емкость! Т.к. на поверхности проводника и диэлектрика появляются заряды.

Для сферических и шарообразных тел известно, что

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon R} \quad \Rightarrow$$

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$$

Единицы измерения: [c]=Ф(Фарад)

Емкость Земли:

$$R = 6400\text{км} \quad \Rightarrow \quad C \sim 700\text{мкФ}$$

## 12.17 Конденсаторы

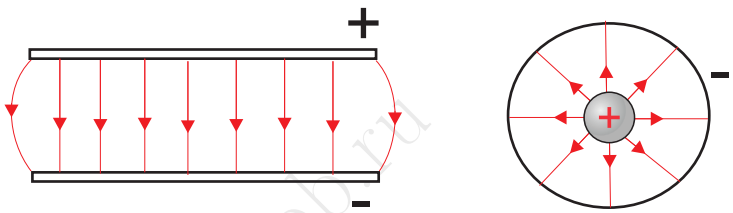
Можно создать такую систему проводников, электрическая емкость которой не зависит от окружающих тел. К тому же ее емкость может быть очень большой.

Демонстрация: к заряженной пластине будем подносить такую же рукой. Потенциал будет уменьшаться, а емкость увеличиваться.

**Def.** Конденсатор - система проводников из двух проводников разделенных тонким слоем диэлектрика(толщина диэлектрика много меньше линейных размеров проводника.)

Конденсаторы можно классифицировать по следующим признакам:

- по форму обкладок - плоские, сферические, цилиндрические




- по виду диэлектрика - воздушные, бумажные, слюдяные, керамические, электролитические
- по конструкции - постоянной емкости и переменной емкости

**Def.** Заряд конденсатора - заряд одной из обкладок

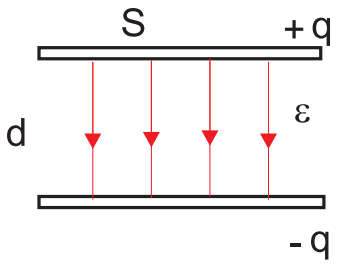
**Def.** Электроемкость конденсатора показывает, какой заряд нужно сообщить одной из обкладок, чтобы разность потенциалов между ними стала равна 1 В

$$\boxed{c = \frac{q}{\Delta\varphi}}$$

1Ф=1Кл/1В

**Def.** 1 Ф - это емкость такого конденсатора при сообщении которому заряда в 1 Кл разность потенциалов между обкладками становится 1 В.

Емкость плоского конденсатора:
От чего будет зависеть емкость плоского конденсатора?




$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\sigma S}{Ed} = \frac{\sigma S \varepsilon\varepsilon_0}{\sigma d} \quad \Rightarrow$$

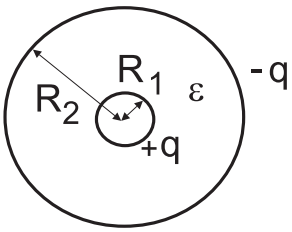
$$\boxed{C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}}$$

Демонстрация

*Емкость плоского конденсатора прямопропорциональна площади обкладок, обратнопропорциональна расстоянию между ними и зависит от вида диэлектрика.* NB!

Задача: К бесконечной проводящей плоскости с зарядом q подносят такую же. Какой заряд будет индуцироваться на поверхности этой плоскости. Если свободная то q/2, если заземлена то q.

Емкость сферического конденсатора:




Основным достоинством сферического конденсатора является, то что электростатическое поле находится только между обкладками.

Чтобы найти емкость такого конденсатора, надо найти разность потенцилов на его обкладках. Если потенциал равен нулю на бесконечности, то потенциал на внешней сфере будет равен:

$$\varphi_2 = k\frac{q}{\varepsilon R_2} - k\frac{q}{\varepsilon R_2} = 0$$

т.е. потенциал на внешней сфере равен нулю, следовательно поле во внешней области равно нулю, т.к. получается, что работу которую должно совершить поле перемещая заряд с внешней сферы на бесконечность равна нулю, следовательно поля нет.

Потенциал на поверхности внутренней обкладки равен сумме потенциалов полей внутренней и внешней обкладок:

$$\varphi_1 = -k\frac{q}{\varepsilon R_2} + k\frac{q}{\varepsilon R_1}$$

$$\Rightarrow \quad |\Delta\varphi| = \frac{kq}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$c = \frac{q}{\Delta\varphi} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Если расстояние между обкладками очень мало по сравнению с радиусами сфер $d = |R_2 - R_1| << \{R_1, R_2\}$, то $R_1 R_2 \approx R^2 = \frac{S}{4\pi}$.

Тогда получаем

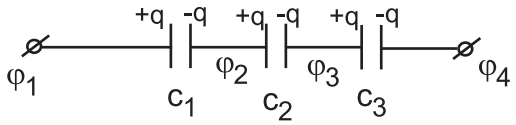
$$\boxed{c = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}}$$

Physics.spb.ru

## 12.18 Соединение конденсаторов

### 12.18.1 Последовательное соединение

При последовательном соединении, вследствие электростатической индукции, на обкладках конденсаторов будут одинаковые заряды.




$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 = \varphi_2 - \varphi_1 \\ \Delta\varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_2 \\ \Delta\varphi_3 = \varphi_4 - \varphi_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_o = \frac{q}{\Delta\phi_o} = \frac{q}{\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3}$$

$$\frac{1}{C_o} = \frac{\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3}{q} = \frac{\Delta\varphi_1}{q} + \frac{\Delta\varphi_2}{q} + \frac{\Delta\varphi_3}{q} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}$$

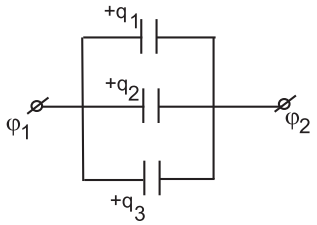
$$\boxed{\frac{1}{c_o} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}}$$

**St.** ➡ ***При последовательном соединении конденсаторов величина, обратная емкости батареи, равна сумме величин, обратных емкостям отдельных конденсаторов***

*Электроемкость последовательной батареи меньше, наименьшей из емкостей, входящих в батарею.*

### 12.18.2 Параллельное соединение

При параллельном соединении на обкладках каждого конденсатора будет одинаковая разность потенциалов, а общий заряд батареи будет равен сумме зарядов на обкладках конденсаторов.




$$q = q_1 + q_2 + q_3$$

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_3 = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$c_o = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\varphi} = c_1 + c_2 + c_3$$

$$\boxed{c_o = c_1 + c_2 + c_3}$$

**St.** ➡ ***При параллельном соединении конденсаторов, емкость батареи равна сумме емкостей, входящих в батарею.***

*Емкость батареи больше наибольшей из емкостей, входящих в батарею.*

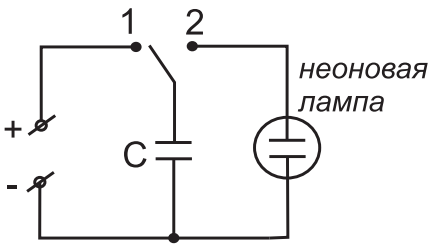
Physics.spb.ru

## 12.19 Энергия электрического поля

### 12.19.1 Энергия плоского конденсатора

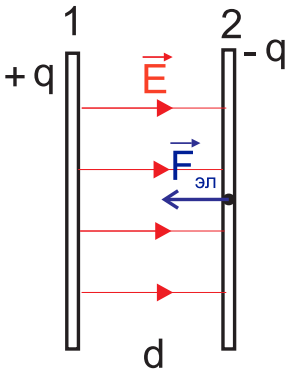
Конденсатор при зарядке накапливает энергию в виде энергии электрического поля. Ранее мы уже рассматривали опыт, демонстрирующий, что электрическое поле обладает энергией. Сильное электрическое поле вызывало свечения неона в стеклянной трубке.

(Видеоэксперимент).




Рассмотрим теперь другой опыт. При положении перекидного переключателя в положении 1, происходит зарядка конденсатора от источника. После зарядки, если переключатель перевести в положение 2, неоновая лампа даст небольшую вспышку. Для того, чтобы появилась вспышка света, необходимо затратить энергию. В этом случае энергия была взята у конденсатора.

Определим, какую энергию можно запасти в плоском конденсаторе.




Энергия запасенная в конденсаторе может быть определена через работу электрического поля, которую нужно полю совершить, при сближении пластин конденсатора вплотную. Т.к. в этом состоянии конденсатор разрядится и поле исчезнет. При перемещении второй пластины в поле первой, электрическое поле совершит следующую работу

$$\Pi = A_{эл} = F_{эл} \cdot d = q\frac{E}{2} \cdot d$$

Здесь мы рассматриваем вторую пластину в поле первой, а поле первой пластины в два раза меньше поля конденсатора $E$.

Тогда, т.к. $E = \frac{\Delta\varphi}{d}$, получаем

$$\Pi = q\frac{\Delta\varphi}{2d} \cdot d = \frac{q\Delta\varphi}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Pi = \frac{q\Delta\varphi}{2}}$$

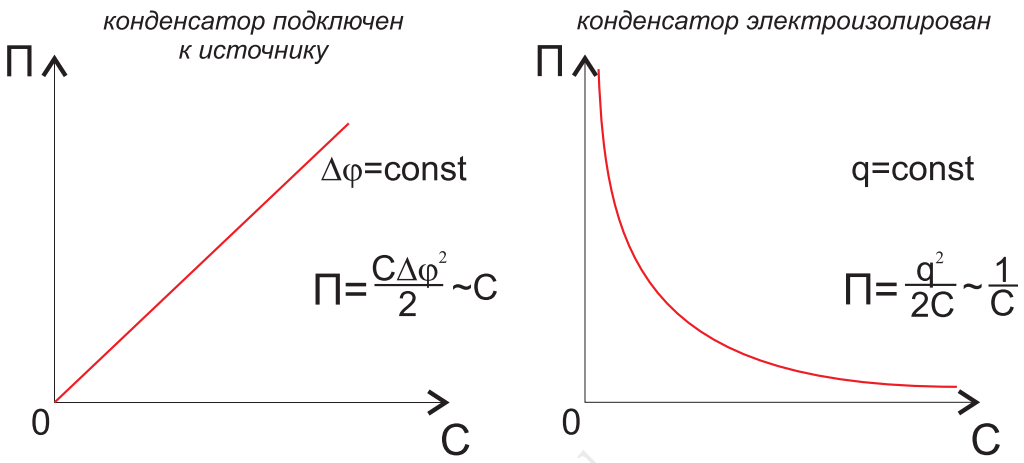
Далее пользуясь определением электроемкости $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$ получим две формулы, которые чаще всего будут встречаться в задачах

$$\boxed{\Pi = \frac{C\Delta\varphi^2}{2}} \boxed{\Pi = \frac{q^2}{2C}}$$

На практике чаще всего можно столкнуться с двумя ситуациями, либо конденсатор все время подключен к источнику, и тогда разность потенциалов на его обкладках остается постоянной. Либо конденсатор зарядили и отключили от источника, тогда если пренебречь стеканием заряда, можно считать, что заряд на обкладках конденсатора будет постоянным.

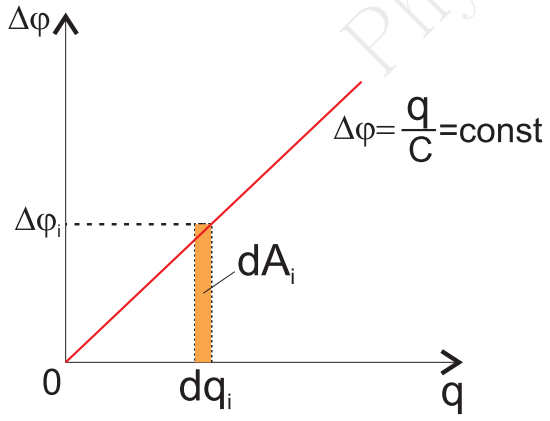
В случае когда конденсатор все время подключен к источнику, увеличение емкости приводит к тому, что от источника заряд перемещается на обкладки конденсатора( для поддержания постоянной разности потенциалов), т.к. он может накопить больший заряд, поэтому с ростом емкости будет расти энергия, которую можно запасти в конденсаторе.

Если же конденсатор отключен от источника, т.е. заряд на обкладках фиксирован, при увеличении емкости, уменьшается разность потенциалов между обкладками, следовательно электрическое поле ослабевает и энергия запасенная в конденсаторе будет меньше.




### 12.19.2 Энергия произвольного конденсатора

Теперь рассмотрим случай произвольного конденсатора, когда форма его обкладок не определена. Будем считать, что его емкость при этом постоянна. Тогда зависимость разности потенциалов от заряда будет прямой пропорциональной.




Если перемножить $dq_i \cdot \Delta\varphi_i$, то пользуясь определением разности потенциалов, получается, что данное произведение это работа совершенная электрическим полем при бесконечно малом изменении заряда $dq_i$ на пластинах.

Тогда, если просуммировать все площади под графиком и устремить число участков к бесконечности, получится, что площадь под всем графиком это работа электрического поля при появлении заряда на пластинах величиной $q$.

$$A = \frac{1}{2}\Delta\varphi q$$

Или если расписать математически, тогда

$$A = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} dq_i\Delta\varphi_i = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} dq_i\frac{q}{C} = \int_0^q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\Delta\varphi q$$

### 12.19.3 Плотность энергии

**Def.** Плотность энергии это характеристика электрического поля, которая показывает какая энергия приходится на единицу объема пространства.

$$\boxed{\mathrm{w} = \frac{\Pi}{V}}$$

Найдем плотность энергии электрического поля на примере плоского конденсатора.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S} \quad \Rightarrow \quad q = E\varepsilon\varepsilon_0 S$$

$$\Delta\varphi = Ed$$

тогда

$$\Pi = \frac{q\Delta\varphi}{2} = \frac{E\varepsilon\varepsilon_0 SEd}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} Sd$$

$$\mathrm{w} = \frac{\Pi}{V} = \frac{\Pi}{Sd} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 Sd}{2Sd} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$$

$$\boxed{\mathrm{w} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}}$$

Видно, что в получившейся формуле отсутствуют данные о геометрии конденсатора, и присутствуют характеристика самого поля и свойства среды: напряженность и диэлектрическая проницаемость.

В общем случае, такая же формула получается, как следствие уравнений Максвелла, описывающих электромагнитные явления.

Physics.spb.ru