7 Законы сохранения.

7.1 Введение

Если известны силы, действующие на материальные точки, то законы динамики дают возможность полностью определить механическое поведение изучаемой системы. Применение II закона Ньютона к каждой из материальных точек позволяет найти ее ускорение в данном месте в данный момент времени и тем самым последовательно, шаг за шагом, проследить ее движение.

Но часто такая детальная информация о движении бывает не нужна. Иногда нас интересует только конечное состояние изучаемой системы, а ее промежуточные состояния не представляют интереса. В подобных случаях быстрее всего к цели приводят законы сохранения.

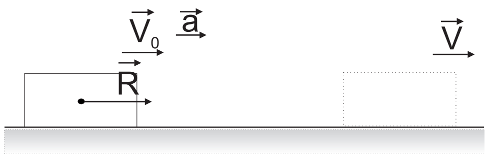
Законы сохранения позволяют:

- решать практические задачи, не прибегая к рассмотрению сил.
- даже когда законы классической механики перестают быть справедливыми(V»c), законы сохранения не теряют значения.

Они применимы и к космическим телам, и к элементарным частицам, в классической и релятивистской механике.

7.2 Понятие импульса тела и импульса силы.

Рассмотрим тело, которое движется равноускоренно под действием равнодействующей силы $\vec{R}$. За время Δt оно увеличивает свою скорость от V_0 до V.



Из второго закона Ньютона можно получить:

$$\vec{R} = m\vec{a} = m\frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t}$$

Отсюда, домножив на Δt, получаем

$$\vec{R}\Delta t = m\vec{v} - m\vec{v}_0 \quad (1)$$

В правой части уравнения стоит разность величины в два момента времени, в начале действия силы R и в конце ее действия.

Def. Импульс тела - векторная физическая величина, равная произведению массы тела на его скорость.

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

Единицы измерения

$$[p] = \text{кг} \cdot \text{м/с}$$

Редкий случай, но новая величина здесь определена как произведение, а не как частное уже известных величин. Поэтому физический смысл, так как он формулировался раньше здесь сформулировать не получится. Но наиболее точно смысл этой величины передает второе ее название.

Импульс тела принято называть количеством движения.

В следующей теме, когда будет разобран закон сохранения импульса, станет понятен физический смысл этой величины.

Физическая величина, равная произведению вектора силы на время ее действия ($\vec{F}\Delta t$), называется импульсом силы.

Импульс сила также будет являться векторной величиной, как и импульс тела.

Импульсная формулировка II-го закона Ньютона:

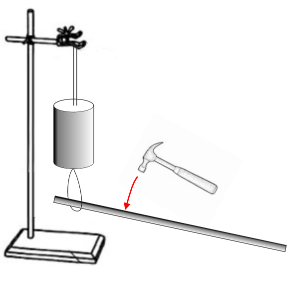
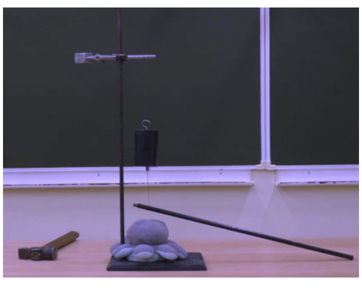
Изменение импульса тела (количества движения) равно импульсу сил, действующих на тело.

$$\boxed{\vec{R}\Delta t = \Delta\vec{p}}$$

Именно в таком общем виде сформулировал второй закон сам Ньютон.
Где можно проверить справедливость второго закона Ньютона в такой форме?

- Рассмотрим два случая: пуля? попадая в стекло? не разбивает его, а только проделывает небольшое отверстие, т.к. время воздействия пули на стекло очень мало, из-за большой скорости тела. Если же в стекло запустить баскетбольный мяч, то стекло полностью разобьется, время действия будет значительным, хотя сила по сравнению с пулей будет много меньше. Во втором случае импульса силы хватит для разрушения окна.

- Опыт по инерции покоя. Подвесим гирю на нитку, а снизу к гире при помощи нитки подвесим стержень.

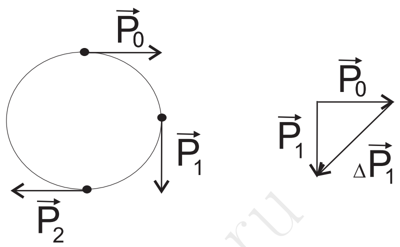



Если ударить по стержню молотком, то порвется только нижняя нитка. Если же на стержень плавно надавить рукой, то порвется только верхняя нитка.

В случае молотка, время действия силы очень мало? и импульс силы будет мал, для выведения гири из состояния покоя. Во втором случае, момент силы будет велик, за счет длительного действия силы.

7.2.1 Пример на изменение импульса тела

Материальная точка массой 1 кг равномерно движется по окружности со скоростью 10 м/с. Найти изменение импульса за одну четверть периода, за половину периода и за целый период.



- *Четверть периода* $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$

$$\Delta p_1 = \sqrt{2}p_0 = \sqrt{2}mv_0 = 14\text{кгм}/c$$

- *Половина периода* $\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_2 - \vec{p}_0$

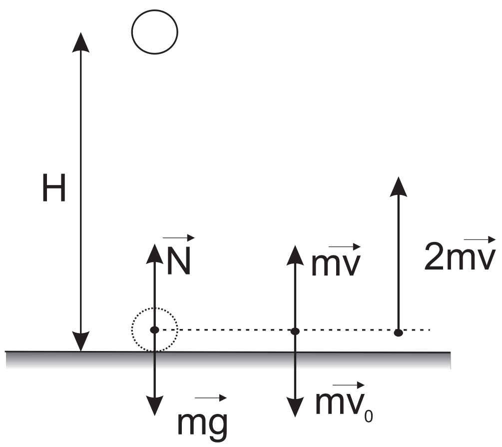
$$\Delta p_2 = 2p_0 = 20\text{кгм}/c$$

- *Целый период* $\Delta\vec{p}_3 = \vec{p}_3 - \vec{p}_0 = \vec{0}$

7.2.2 Пример задачи на импульсную формулировку II закона Ньютона

Упругое тело массой m падает с высоты H. Найти величину силы реакции опоры в момент удара, если известно, что он длится время Δt.

Решение:



Запишем второй закон Ньютона в импульсной форме: на тело в момент удара действуют две силы, при этом изменение импульса равно $2mv$

$$(\vec{N} + m\vec{g})\Delta t = 2m\vec{v}$$

Спроецируем на вертикаль:

$$(N - mg)\Delta t = 2mv$$

Из кинематики можно найти,ч то скорость в момент падения определяется следующей формулой:

$$v = \sqrt{2gH}$$

Отсюда получаем

$$N = \frac{2mv}{\Delta t} + mg = \frac{2m\sqrt{2gH}}{\Delta t} + mg = m\left(\frac{2\sqrt{2gH}}{\Delta t} + g\right)$$

7.3 Закон сохранения импульса

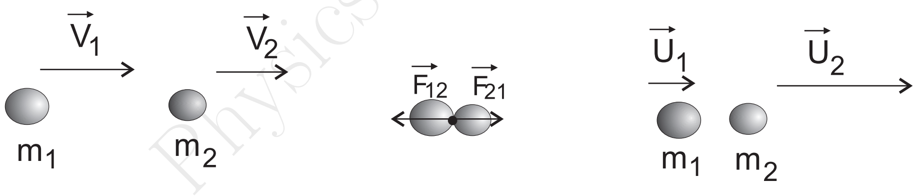
7.3.1 Импульс системы тел

Рассмотрим теперь систему нескольких тел. Все силы, действующие в такой системе, можно разделить на внутренние и внешние. Причем для каждой внутренней силы найдется равная и противоположено направленная внутренняя сила.

Def. Импульсом $\vec{P}$ системы частиц, называется векторная сумма импульсов отдельных частиц, входящих систему, в одно и то же время

7.3.2 ЗСИ для двух тел.

Рассмотрим два шарика массой m_1 и m_2. Предположим, что первый шарик догоняет второй.



Запишем третий закон Ньютона в момент удара

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad | \cdot \Delta t$$

Домножим его на время столкновения Δt:

$$\vec{F}_{12}\Delta t = -\vec{F}_{21}\Delta t$$

Дальше запишем второй закон Ньютона в импульсной формулировке для каждого из шариков:

$$\vec{F}_{12}\Delta t = m_1\vec{u}_1 - m_1\vec{v}_1$$
$$\vec{F}_{21}\Delta t = m_2\vec{u}_2 - m_2\vec{v}_2$$

Подставим это в третий закон Ньютона и получим:

$$m_1\vec{u}_1 - m_1\vec{v}_1 = -(m_2\vec{u}_2 - m_2\vec{v}_2)$$

где v_1, v_2 -скорости шариков в начальный момент времени, а u_1, u_2 скорости шариков после столкновения.

Отсюда получаем:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

В последнем уравнении слева стоит импульс системы из двух шариков до столкновения, а справа импульс системы после столкновения. Таким образом, видим, что в результате столкновения импульс системы не изменился.

Но в общем случае в системе может присутствовать много тел, но для каждой пары тел можно провести аналогичное рассуждение. В данном примере отсутствовали внешние силы. Если бы на систему подействовать внешней силой, то данное утверждение будет неверно.

Замкнутая система:

Def. Под замкнутой или изолированной системой понимают такую систему тел, для которых сумма внешних сил, действующих на каждое тело системы, равна нулю или внешние силы отсутствуют.

Закон сохранения импульса:

Law → ***Геометрическая сумма импульсов тел, составляющих замкнутую систему, остается постоянной при любом взаимодействии тел этой системы между собой.***

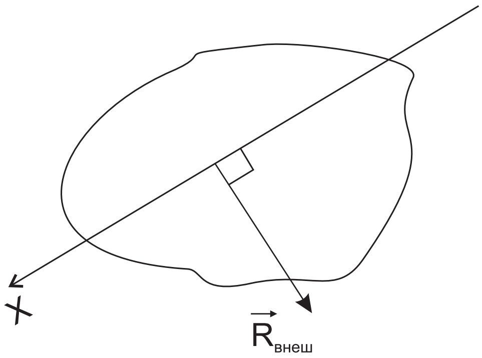
или иначе

Law → ***Полный импульс замкнутой системы остается постоянным.***

$$\boxed{\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = const} \tag{2}$$

7.3.3 Границы применимости ЗСИ

- Закон применяется в векторном виде только для замкнутых систем
- Если система не замкнута, т.е. присутствуют нескомпенсированные внешние силы, то есть два варианта при которых, можно применить ЗСИ в векторном виде. Первый вариант: внешние силы много меньше внутренних, в этом случае импульсом внешних сил можно пренебречь и использовать ЗСИ (пример - взрыв снаряда, силы, разрывающие снаряд, много больше силы тяжести, действующей на снаряд). Второй вариант: время действия внешних сил мало, тогда так же импульс внешних сил будет мал и ими можно пренебречь.
- Если внешние силы велики и действуют длительное время, тогда ЗСИ можно применить в проекции на координатную ось, перпендикулярную равнодействующей внешних сил.



$$P_x = const$$

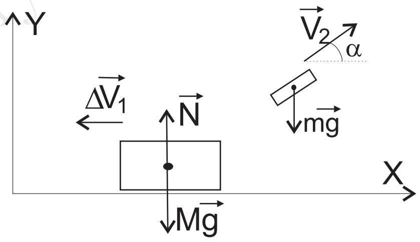
7.3.4 Применение ЗСИ в незамкнутой системе

Является ли условие замкнутости строгим? Можно ли применить закон сохранения импульса в незамкнутой системе? Во-первых, стоит отметить, что ЗСИ является векторным и в таком виде может применяться только для замкнутой системы.

Давайте рассмотрим следующий пример:

Пример:

С судна массой 750 т произведен выстрел из пушки в сторону, противоположную его движению, под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. На сколько изменилась скорость судна, если снаряд массой 30 кг вылетел со скоростью 1км/с относительно судна.



Решение: На снаряд действует нескомпенсированная сила тяжести, но она действует параллельно вертикальной оси OY. Тогда ЗСИ будет выполняться в проекции на ось OX.

Запишем закон сохранения импульса в системе отсчета, связанной с кораблем.

$$P_x = P_x' = 0$$

$$0 = -M\Delta v_1 + mv_2 \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \Delta v_1 = \frac{mv_2 \cos\alpha}{M} = 0,02\text{м}/c$$

Если система тел не замкнута и векторная сумма всех внешних сил не равна нулю, но, если сумма проекций на некоторое направление равна нулю, то проекция полного импульса системы на это направление сохраняется.

$$\sum \vec{F}_{\text{вн}} \neq 0 \quad \text{и} \quad \sum F_{i\text{вн}X} = 0$$

Тогда

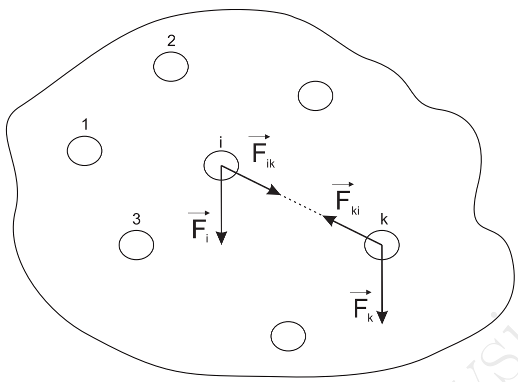
$$\boxed{P_X = const}$$

7.4 ЗСИ для системы тел.

Рассмотрим систему тел, состоящую из N тел. Предположим, что на систему действуют внешние силы.

Введем следующие обозначения:

- $\vec{F}_i$ - сумма всех внешних сил, действующих на i-ую частицу системы
- $\vec{F}_{ik}$ - сила, с которой к-ая частица действует на i-ую.



Согласно III закону Ньютона частицы действую друг на друга с одинаковыми по величине и противоположными по направлению силами.

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$$

Запишем второй закон ньютона для i-ой частицы в импульсной формулировке:

$$(\vec{F}_i + \sum_{k=1, k\neq i}^{N} F_{ik})\Delta t = \Delta\vec{p}_i$$

Импульс всех сил, действующих на i-ую частицу, равен изменению ее импульса.

Отсюда найдем изменение импульса системы:

$$\Delta\vec{P} = \sum_{i=1}^{N}\Delta\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i + \sum_{k=1, k\neq i}^{N} F_{ik})\Delta t = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\Delta t$$

Все внутренние силы скомпенсированы, поэтому останется только векторная сумма всех внешних сил, действующих на систему.

<u>ЗСИ:</u> *Изменение импульса системы тел равно импульсу равнодействующих внешних сил, действующих на эту систему.*

$$\boxed{\Delta\vec{P} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\Delta t}$$

Если внешних сил нет, или они скомпенсированы, тогда изменение импульса системы будет равно нулю, т.е. импульс системы сохраняется.

$$\boxed{\Delta\vec{P} = \vec{P}_1 - \vec{P}_0 = \vec{0}}$$

7.5 Доказательство теоремы о движении центра масс

Докажем теорему о движении центра масс:

Law → ***Центр масс твердого тела движется так же, как двигалась бы материальная точка той же массы под действием тех же внешних сил, которые действуют на данное тело.***

Вспомним формулу, описывающую положение центра масс тела:

$$\vec{r}_{1c} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{1i}}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}$$

Пусть тело переместилось в новую точку под действием некоторой внешней силы, при этом изменилось положение центра масс тела:

$$\vec{r}_{2c} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{2i}}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}$$

Тогда вектор перемещения центра масс можно записать в следующем виде:

$$\Delta\vec{r}_c = \vec{r}_{2c} - \vec{r}_{1c} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \Delta\vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}$$

Поделим последнее уравнение на время действия внешней силы:

$$\vec{V}_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{M} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M\vec{V}_c = \vec{P}}$$

Полный импульс системы равен произведению массы системы на скорость центра масс

Отсюда получаем, поделив последнее уравнение на Δt:

$$M\frac{\Delta\vec{V}_c}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$M\vec{a}_c = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

То есть, центр масс твердого тела движется так же, как двигалась бы материальная точка той же массы под действием тех же внешних сил.

7.6 Реактивное движение. Уравнение Мещерского.

7.6.1 Определение.

Def. Под реактивным понимают движение, возникающее при истечении из тела части его массы с определенной скоростью относительно тела в определенном направлении. При этом возникает реактивная сила "толкающая"тело вперед.

Главной особенностью реактивного движения является то, что тело может ускоряться или тормозиться без взаимодействия с другими телами (т.е. без внешних сил)

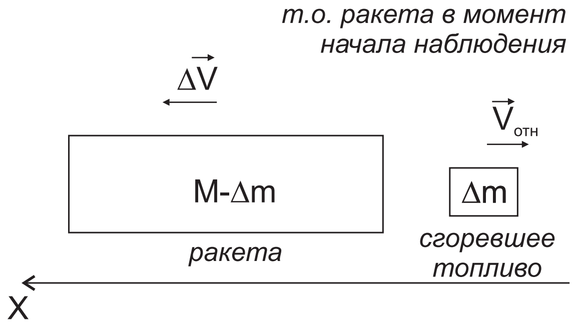
Реактивное движение происходит под действием внутренних сил системы. NB!

Замечание: Масса тела при реактивном движении с течением времени убывает, поэтому для описания этого движения нельзя непосредственно использовать II закон Ньютона!

Принцип реактивного движения позволяет объяснить закон сохранения импульса замкнутой системы. При сгорании топлива повышается температура и создается высокое давление, благодаря чему, продукты сгорания с большой скоростью вырываются из сопла двигателя ракеты. В отсутствие внешних сил импульс ракеты и вылетающих из сопла газов остается неизменным. Поэтому при истечении газов ракета приобретает скорость в противоположном направлении.

7.6.2 Вывод уравнения Мещерского

Пусть в некоторый момент времени ракета в какой-то инерциальной системе отсчета имела скорость $\vec{v}$. Введем другую инерциальную систему отсчета, в которой в данный момент времени ракета неподвижна. Если двигатель ракеты работает и за промежуток времени Δt выбрасывает сгоревшее топливо в виде газов массой Δm со скоростью $\vec{v}_{\text{отн}}$ относительно ракеты , то спустя время Δt скорость ракеты в этой системе будет отлична от нуля и равна $\Delta\vec{v}$.



Применим к рассматриваемой системе ракета плюс газы - закон сохранения импульса.

В начальный момент времени ракета и газы покоятся в выбранной системе отсчета, поэтому полный имупульс системы равен нулю.

Спустя время Δt импульс ракеты равен $(M-\Delta m)\Delta\vec{v}$, а импульс газов $\Delta m\vec{v}_{\text{отн}}$, поэтому

$$(M-\Delta m)\Delta\vec{v} + \Delta m\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{0}$$

При этом масса системы "ракета-газы"сохраняется.

Поделим последнее уравнение на промежуток времени Δt:

$$M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} - \Delta m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t}\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{0}$$

Устремим $\Delta t \to 0$. Тогда в первом слагаемом отношение $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \to \vec{a}_{\text{мгн}}$, во втором слагаемом получим в пределе ноль, т.к. $\Delta m \to 0$, а в третьем слагаемом $\frac{\Delta m}{\Delta t} \to \frac{dm}{dt}$. Здесь $\frac{dm}{dt}$ - скорость сгорания топлива, показывает какая масса топлива сгорает в единицу времени.

В итоге получится следующее уравнение

$$M\vec{a}_{\text{мгн}} + \frac{dm}{dt}\vec{v}_{\text{отн}} = 0 \quad \Rightarrow \quad M\vec{a}_{\text{мгн}} = -\frac{dm}{dt}\vec{v}_{\text{отн}}$$

Далее необходимо учесть, что сколько топлива сгорело за время Δt, ровно на столько уменьшилась масса ракеты. При этом скорости сгорания топлива и изменения массы ракеты, будут по величине одинаковыми, но разными по знаку, т.к. масса ракеты уменьшается.

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{dM}{dt}$$

воспользовавшись этим получим

$$M\vec{a}_{\text{мгн}} = \frac{dM}{dt}\vec{v}_{\text{отн}}$$

Если посмотреть на это уравнение, то оно напоминает второй закон Ньютона, где в правой части должна была бы стоять сила. То, выражение, которое получилось в правой части, принято называть *реактивной силой*.

$$\vec{F}_{\text{реакт}} = \frac{dM}{dt}\vec{v}_{\text{отн}}$$

Величина реактивной силы зависит от того как быстро сгорает топливо в двигателе и с какой скоростью продукты горения вылетают относительно ракеты. В последних двух формулах надо учитывать, что $\frac{dM}{dt} < 0$, т.е. вектор $\vec{a}_{\text{мгн}}$ и вектор $\vec{F}_{\text{реакт}}$ направлены в сторону противоположную $\vec{v}_{\text{отн}}$

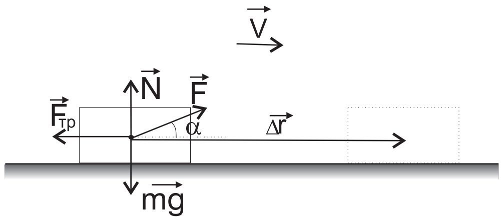
Чтобы получить уравнение Мещерского, необходимо рассмотреть ракету при наличии внешних сил. Это уравнение в общем случае получается, если записать закон изменения импульса ракеты при наличии внешних сил. Но мы сделаем это интуитивно, без доказательства, просто добавив равнодействующую внешних сил в ту часть уравнения, где находится реактивная сила.

$$\boxed{M\vec{a}_{\text{мгн}} = \frac{dM}{dt}\vec{v}_{\text{отн}} + \sum_i \vec{F}_{i\text{внеш}}}$$

Это уравнение было получено Иваном Всеволодовичем Мещерским, русским и советским ученым-механиком в 1897 году.

7.7 Механическая работа

Понятие импульса силы характеризует действие силы во времени, а механическая работа характеризует действие силы в пространстве:



$$\boxed{A = (\vec{F}, \vec{\Delta r}) = F \Delta r \cos\alpha} \tag{3}$$

где α - угол между силой и направлением перемещения тела.

Def. Работа силы F при перемещении тела к которому она приложена равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещение Δr точки ее приложения.

Свойства работы:

- Если точка приложения силы не перемещается относительно данной системы отсчета, то работа этой силы равна нулю. Следовательно, величина работы будет зависеть от выбора системы отсчета.

- Величина работы зависит от угла α:

$$\begin{aligned} 0^\circ \leqslant \alpha < 90^\circ &\quad : A > 0 \\ \alpha = 90^\circ &\quad : A = 0 \\ 90^\circ < \alpha \leqslant 180^\circ &\quad : A < 0 \end{aligned}$$

  В примере с горизонтальным перемещением тела(см. рисунок выше), полезную работу совершает только сила F, сила тяжести и сила нормальной реакции опоры, перпендикулярны перемещению тела, поэтому работа этих сил равна нулю. Сила же трения скольжения направлена в сторону противоположную скорости и в данном случае перемещению, поэтому эта сила совершает вредную работу, препятствуя движению тела.

- Если на тело действует сразу несколько сил, то работа равнодействующей всех сил равна сумме работ отдельных сил

$$A = A_1 + A_2 + ... + A_N$$

- Работа силы F при конечном перемещении тела равна сумме работ на элементарных участках, на которые можно разложить траекторию движения.

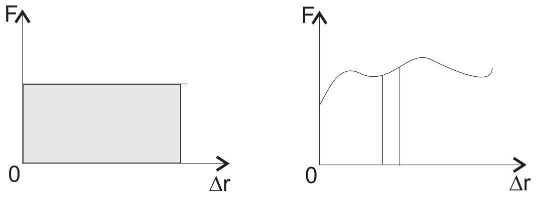
- Если $F = const$ и $\alpha = const$, то $A = F \Delta r \cos\alpha$

Если меняется величина силы или направление, то последней формулой пользоваться нельзя

В этом случае все перемещение разбиваем на бесконечно маленькие элементарные перемещения, на которых угол и сила остаются постоянными, тогда

$$A = \sum_i F_i \Delta r_i \cos\alpha$$

7.7.1 Графический метод вычисления работы



Если сила постоянна при перемещении тела, тогда

$$A = F_x \Delta r = S_\square$$

Если сила не постоянна, то разбиваем на маленькие участки, такие что $F_i = const$, тогда

$$A = \sum \vec{F}_i \Delta \vec{r}_i$$

Если число промежутков устремить к бесконечности, то сумма будет равна площади под графиком.

Площадь под графиком зависимости силы от перемещения численно равна работе этой силы на данном перемещении

7.7.2 Единицы измерения работы

В СИ работа измеряется в *Джоулях*.

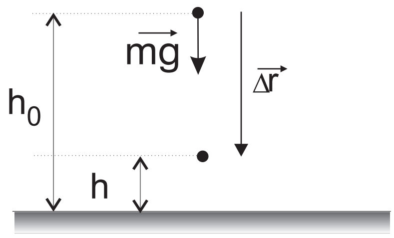
$$1\text{Дж} = 1\text{Н} \cdot 1\text{м}$$

Def. За единицу работы в СИ принята работа силы в 1 Н на пути в 1 м при условии, что направление силы и перемещения совпадают

7.8 Работа силы тяжести

Рассчитаем работу силы тяжести при движении тела по различным траекториям. Рассмотрим движение тела по идеальной наклонной плоскости.

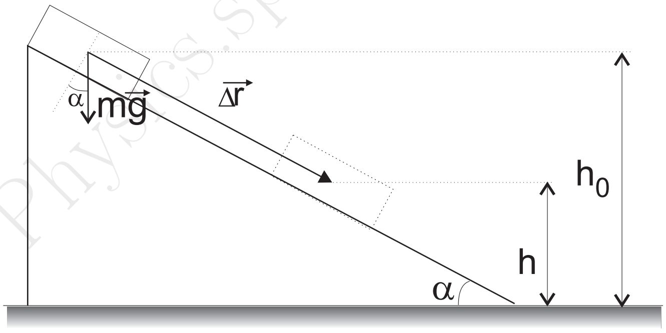
1. Допустим тело свободно падает с высоты h_0 до высотs h.



Тогда работа, совершенная силой тяжести, равна

$$A_{mg} = mg \cdot |\Delta\vec{r}| = mg(h_0 - h) = -\Delta hmg$$

2. Пусть тело свободно соскальзывает по наклонной плоскости с высоты h_0 до высоты h.

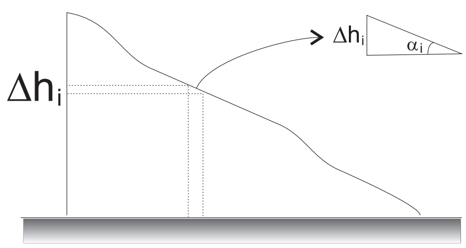


Тогда работа, совершенная силой тяжести, равна

$$A_{mg} = mg\cos(\pi/2 - \alpha) \cdot |\Delta\vec{r}| = mg(h_0 - h) = -mg(h - h_0) = -mg\Delta h$$

Таким образом при спуске по наклонной плоскости мы получаем результат, который зависит для данного тела только от начальной и конечной высоты.

3. Предположим, что тело спускается по произвольной траектории.



Любую траекторию с достаточной степенью точности можно представить в виде ломаной, состоящей из набора элементарных прямолинейных участков.

Тогда полную работу можно представить, как сумму элементарных работ на этих участках. При этом нетрудно заметить, что работа силы тяжести на всех горизонтальных участках равна нулю (сила тяжести образует с перемещением прямой угол), и остается только просуммировать работы на наклонных и вертикальных участках, каждый из которых можно свести к предыдущим случаям:

$$A_{mg} = \sum_i A_i = mg \sum_i (-\Delta h_i) = -mg\Delta h$$

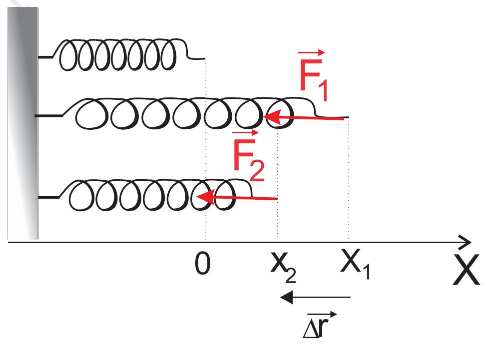
В итоге получили формулу в общем случае для работы силы тяжести:

$$\boxed{A_{mg} = -mg\Delta h = -mg(h - h_0)} \tag{4}$$

Величина работы силы тяжести зависит от величины силы тяжести и от расстояния, пройденного по вертикали, и <u>не зависит от формы траектории</u>

7.9 Работа силы упругости

Рассмотрим работу, которую совершает упругая сила пружины над грузом, прикрепленным к одному концу невесомой пружины, другой конец которой закреплен и в данной СО неподвижен.



При любой деформации пружины возникает упругая сила, которая направлена к положению равновесия груза, в котором пружина оказывается недеформированной.

Растянем пружину на $\Delta x = x_1 - x_0$, где $x_0 = 0$ - координата конца пружины в недеформированном состоянии, а x_1 - координата груза в данный момент. При этом возникшая сила упругости будет равна

$$|F_1| = k\Delta x = kx_1$$

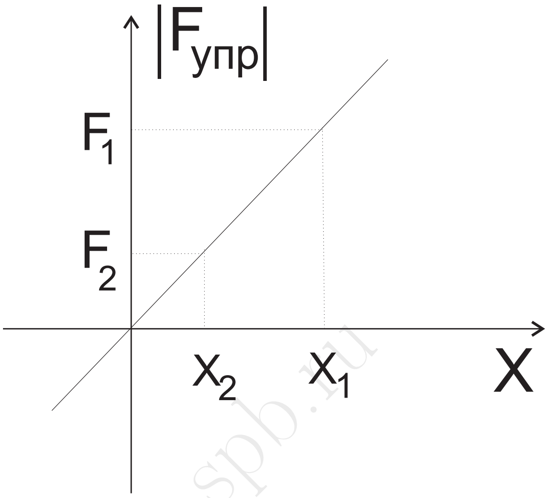
А теперь вычислим работу силы упругости при перемещении груза в точку с координатой x_2.

В новом положении сила упругости будет равна

$$|F_2| = kx_2$$

При этом модуль перемещения будет равен $\Delta r = x_1 - x_2$. Поскольку в данном случае сила и перемещение сонаправлены, то угол $\alpha = 0$.

Поскольку величина силы меняется найдем работу силы графиеческим способом из графика $F(x)$:



$$A_{\text{упр}} = \frac{F_1 + F_2}{2}(x_1 - x_2) = \frac{1}{2}k(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2)$$

$$\boxed{A_{\text{упр}} = -\frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)} \quad (5)$$

Работа силы упругости не зависит от формы траектории, а определяется только начальными и конечными координатами тела

Если $x_1 > x_2$, тогда работа положительна, сила сонаправлена с перемещением, если $x_1 < x_2$, тогда работа отрицательна, это соответсвует растяжению пружины.

7.10 Мощность.

Мощность характеризует быстроту совершения работы.

$$\boxed{N_{\text{ср}} = \frac{A}{\Delta t}}$$

Def. Мощность - физическая величина, которая показывает, какая работа была совершена за единицу времени.

$$N_{\text{ср}} = \frac{A}{\Delta t} = \frac{(\vec{F}, \Delta\vec{r})}{\Delta t} = (\vec{F}, \vec{V}_{\text{ср}})$$

Если при этом устремить $\Delta t \to 0$, тогда получим мгновенную мощность

$$N_{\text{мгн}} = (\vec{F}, \vec{V}_{\text{мгн}})$$

Единица измерения:
В СИ мощность измеряется в *Ваттах*

$$[N] = \text{Вт}$$

$$1\text{Вт} = \frac{1\text{Дж}}{1\text{с}}$$

Def. 1 Вт - мощность такой силы, которая совершает работу в 1 Дж за 1 с

На практике часто в качестве единицы измерения используется *лошадиная сила.*

$$\boxed{1\text{л.с.} = 736\text{Вт}}$$

7.11 Консервативные и диссипативные силы

Все силы, действующие на тела можно разбить на две группы: консервативные (от латинского *conservatio* - сохранение) и неконсервативные - диссипативные (от латинского *dissipatio* - рассеяние).

Def. Силу называют консервативной, если ее работа при изменении положения тела в пространстве не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным состоянием системы (например начальной и конечной координатой)

Примером консервативных сил является сила упругости и сила тяжести.

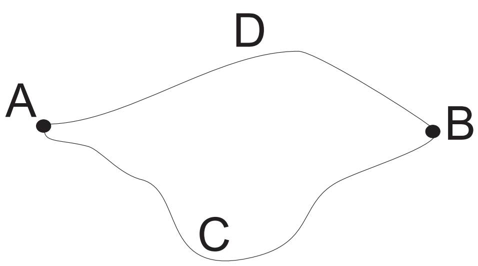
Def. Диссипативные силы - силы, работа которых зависит от формы траектории

Примером диссипативной силы является сила трения. Перемещая какой-либо предмет по полу, мы совершаем работу против силы трения. При этом эта работа будет зависеть от формы траектории.

Но сила трения может совершать положительную работу, когда тело движется под действием этой силы. Например, на тележке лежит груз. Тележка начинает двигаться. Тогда груз будет перемещаться вместе с тележкой за счет силы трения между грузом и тележкой.

Th *Работа консервативных сил по произвольной замкнутой траектории равна нулю.*

Доказательство: Рассмотрим движение тела по замкнутой траектории. Пусть тело переместилось из точки A в B по пути ACB, а затем обратно по тому же самому пути.



На обратном пути сила в каждой точке будет равна силе, действовшей в этой точке на пути туда. Но напарвление перемещения на обратном пути будет противоположно направлению перемещения на пути туда. Поэтому

$$A_{ACB} + A_{BCA} = 0$$

Пусть теперь обратное перемещение происходит по пути BDA. Работа консервативной силы не зависит от формы траектории поэтому $A_{BDA} = A_{BCA}$

Тогда

$$A_{ACBDA} = A_{ACB} + A_{BDA} = A_{ACB} + A_{BCA} = 0$$

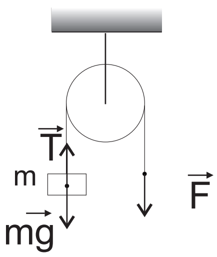
$\square qed$

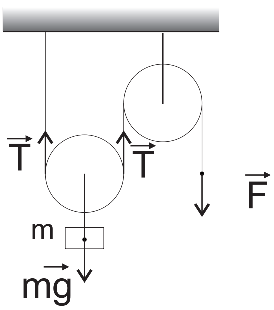
7.12 Простые механизмы

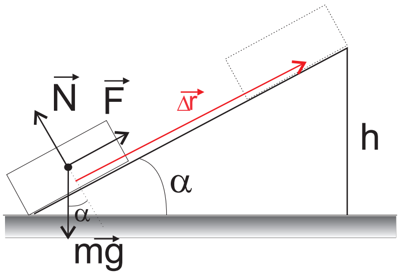
К простым механизмам относят:

- блоки
- рычаги
- наклонные плоскости

Основная цель простых механизмов это получить выигрыш в силе.







При этом надо учитывать, что выигрыша в работе не будет.

7.12.1 Неподвижный блок

Def. Блок называется неподвижным, если его ось не перемещается в пространстве.

Неподвижный блок не дает выигрыша в силе, но позволяет менять ее направление.

$$F = T = mg$$

При подъеме тела на высоту h будет совершаться работа

$$A = Fh = Th = mgh$$

7.12.2 Подвижный блок

Def. Блок называется подвижным, если его ось перемещается в пространстве.

Подвижный блок обычно используют в сочетании с неподвижным. При этом подвижный блок дает выигрыш в силе в два раза. Рассмотрим силы действующие на подвижный блок. Вверх на него действуют две силы реакции нити, а вниз вес груза. Соответственно тогда получается

$$2T = mg \quad \Rightarrow \quad F = T = \frac{mg}{2}$$

Но, чтобы подвижный блок поднялся на высоту h, необходимо, чтобы конец нити, к которому приложена сила F, переместился на расстояние $2h$, поэтому

$$A = F2h = \frac{mg}{2}2h = mgh$$

7.12.3 Идеальная наклонная плоскость

Идеальная наклонная плоскость также позволяет получить выигрыш в силе, который будет зависеть от угла

$$F = mg\sin\alpha$$

Видно, что меньше будет угол, тем больше будет выигрыш в силе. Если же посчитать работу для поднятия тела на высоту h то получится

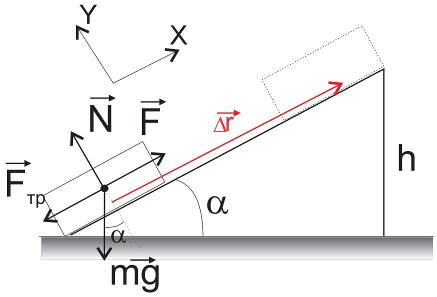
$$A = F|\Delta\vec{r}| = mg\sin\alpha|\Delta\vec{r}| = mgh$$

St. *Золотое правило механики Во сколько раз получаем выигрыш в силе во столько раз проигрываем в расстоянии.*

7.12.4 Наклонная плоскость с трением

Теперь рассмотрим реальную наклонную плоскость при наличии трения. В этом случае, часть работы будет тратиться на преодоление силы трения, и тогда можно рассчитать коэффициент полезного действия КПД такой наклонной плоскости.

Тело поднимают по наклонной плоскости, прикладывая силу F на высоту h.



КПД равен отношению полезной работы к затраченной.

В данном случае полезная работа связана с подъемом тела на высоту h и будет равна

$$A_{\text{полезн}} = mgh$$

А реально затраченная работа, будет равна работе силы F, при этом надо учитывать, что для того, чтобы КПД был максимальным, сила F должна совершить минимальную работу, следовательно, тело надо поднимать с постоянной скоростью:

$$A_{\text{затрач}} = A_F = F|\Delta\vec{r}|\cos 0 = (mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha)|\Delta\vec{r}|$$

Тогда КПД будет равен

$$\eta = \frac{A_{\text{полез}}}{A_{\text{затрач}}} = \frac{mgh}{(mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha)|\Delta\vec{r}|} = \frac{mg\sin\alpha}{mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}$$

поделив числитель и знаменатель на синус, получим

$$\boxed{\eta = \frac{1}{1 + \mu\operatorname{ctg}\alpha}}$$

Из полученной формулы видно, что при уменьшении коэффициента трения, т.е. уменьшении силы трения, КПД будет возрастать. Это можно объяснить тем, что меньше работы будет тратиться на преодоление силы трения.

Если же угол α будет расти, то $\operatorname{ctg}\alpha$ будет уменьшаться и КПД также будет возрастать, что можно аналогично объяснить уменьшением величины силы трения.

7.13 Представления об энергии.

Это одно из самых сложных понятий, которое окончательно сформировалось в науке лишь в середине 19 века. Термин энергия (в современном смысле этого слова) был введен английским физиком Томасом Юнгом в 1807 году (его именем называется модуль в теме сила упругости).

Энергия неразрывно связана с движением, но ведь движение это неотъемлемое свойство материи (вспомним, что под движением материи подразумевается любое изменение). В физике под движением понимают всякое изменение состояния тела или системы тел. А к середине 19 века было установлено, что все физические формы движения взаимопревращаемы. Об этом можно судить по тому, что различные формы движения могут вызывать одинаковые изменения состояния системы. Так, нагрев металлического проводника можно вызвать различными способами: нагреванием, трением, пропусканием тока и т.д. Это позволяет сравнивать различные формы движения и устанавливать эквивалентные соотношения между ними.

Таким образом, возможность количественного сравнения любых внешних воздействий приводит к установлению понятия, характеризующего состоянием системы. Так вводится понятие *энергии*, которая должна характеризовать состояние взаимодействующих тел.

Def. Энергия - универсальная количественная мера движения материи

Очевидно, что состояние системы может быть описано посредством разных характеристик, с разных точек зрения, следовательно, и характеристики тоже будут различными. Поскольку мы изучаем механическое движение, то нас будет интересовать в первую очередь механическая энергия:

Def. Механическая энергия - количественная мера механического состояния системы (функция состояния), однозначно определяемая через координаты и скорости составных частей системы.

Однозначность означает, что любому переходу системы из одного состояния в другое соответствует строго определенное изменение энергии **NB!**

Механическая энергия бывает двух видов:

- кинетическая
- потенциальная

Зачем мы вводим еще одну характеристику механического движения, ведь мы уже определили импульс тела?

Рассмотрим следующий пример:

Пусть в некоторой ИСО навстречу друг другу летят два одинаковых шарика с одинаковыми по величине скоростями. При отсутствии внешних воздействий систему можно считать замкнутой. Тогда в системе центра масс шариков импульс системы равен нулю.

Состояние шариков после взаимодействия изменилось. Они нагрелись. Но импульс остался таким же, как и до взаимодействия - равным нулю. Следовательно, импульс не несет в данном случае никакой полезной информации. Ведь если импульс системы равен нулю, мы не можем сказать, движутся ли отдельные части системы.

<u>Замечание 1:</u> Несмотря на частую замену тела материальной точкой, каждый элемент реального тела обладает микроструктурой. Однако, наши знания о строении вещества ограничены (молекулы, атомы, электроны, кварки, а что дальше?). Поэтому невозможно установить точный (абсолютный) запас механической энергии реального объекта.

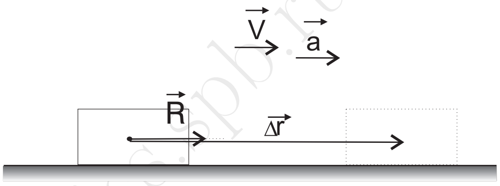
<u>Замечание 2:</u> В переводе с греческого *energia* означает деятельность, работоспособность. Иначе говоря, движущееся тело способно совершить работу.

7.14 Кинетическая энергия

Def. Кинетическая энергия - энергия движущегося тела

Рассмотрим тело движущееся по прямой. Пусть на тело в некоторой ИСО действует несколько сил, которые можно заменить равнодействующей:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$$



Поскольку тело движется по прямой, угол между равнодействующей и перемещением равен 0°. Найдем работу равнодействующей:

$$A = RS\cos\alpha = maS = m\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Мы получили, что работа зависит только о начального и конечного состояния системы. Тогда в качестве кинетической энергии определим следующую величину:

$$\boxed{K = \frac{mv^2}{2}}$$

Сформулируем следующую теорему:
<u>**Теорема о кинетической энергии:**</u>

Law *Работа равнодействующей всех действующих на тело сил равна изменению кинетической энергии тела*

$$\boxed{A_{\text{всех сил}} = \Delta K}$$

В приращении импульса системы тел стоял импульс только внешних сил. В данном случае, работа внутренних сил может и не компенсироваться, т.к. частицы могут совершать различные перемещения. **NB!**

Единицы измерения: В СИ кинетическая энергия измеряется в Джоулях, поскольку изменение кинетической энергии равно работе.

$$[K] = \text{Дж}$$

Свойства кинетической энергии:

- Из теоремы о кинетической энергии следует, что в зависимости от знака работы, совершенной действующими на тело силами, его скорость либо увеличивается (работа положительна, растет энергия), либо уменьшается (работа отрицательна, ее совершает сила сопротивления, энергия уменьшается.)
- Так как теорема о кинетической энергии получена из II-го закона Ньютона, то она справедлива независимо от того, какие силы действуют на тело.
- Можно показать, что эта теорема справедлива и для случая, когда сила не является постоянной и когда направления силы и перемещения не совпадают.
- Физический смысл кинетической энергии вытекает из следующих соображений:

$$A = K - K_0 \quad \text{Если} \quad v_0 = 0 \rightarrow A = K$$

  По отношению к выбранному начальному состоянию кинетическая энергия численно равна работе, которую должна совершить сила, действующая на покоящееся тело, чтобы сообщить ему данную скорость (или которую должна совершить тормозящая сила, чтобы остановить тело, движущееся с данной скоростью.)
- Кинетическая энергия - величина относительная, т.к. скорость зависит от выбора системы отсчета.

В задачах нас в первую очередь будет интересовать не величина кинетической энергии, а ее изменение. NB!

Теорема о кинетической энергии является мощным инструментов для решения задач на законы сохранения, зачастую ею пользоваться значительно удобнее и проще чем законом сохранения или изменения энергии, т.к. в теореме о кинетической энергии нет ни слова о потенциальной энергии и входит работа, которую достаточно просто посчитать для любой силы, встречающейся в школьном курсе физики.

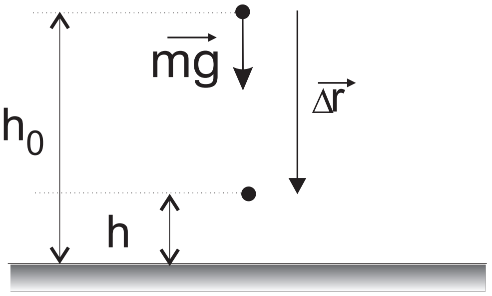
Рассмотрим пример задачи, которую решим через теорему о кинетической энергии и потом в следующих темах, эту же задачу через закон изменения энергии.

7.15 Потенциальная энергия.

Def. Потенциальная энергия это энергия взаимодействия.

7.15.1 Потенциальная энергия тела поднятого над Землей.

В случае тела, поднятого над поверхностью Земли, речь идет о гравитационном взаимодействии тела и Земли.



В этом случае нами была получена формула для расчета работы силы тяжести:

$$A_{mg} = mgh_0 - mgh$$

Несложно увидеть, что работа это разность одной и той же величины, взятой в разные моменты времени, причем эта величина mgh равна работе, которую бы совершила сила тяжести перемещая тело с данной высоты h на уровень Земли, относительно которого отсчитывается эта высота.

Поэтому за потенциальную энергию тела поднятого над Землей берут следующую величину:

$$\boxed{\Pi = mgh + C}$$

где C - это константа, определяющая, где выбран ноль потенциальной энергии.

Если за ноль потенциальной энергии выбран уровень Земли, т.е.

$$\Pi = 0 \Leftrightarrow h = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = mg \cdot 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

в этом случае константа будет равна нулю.

Тогда используя потенциальную энергию получается, что

$$A_{mg} = \Pi_0 - \Pi = -\Delta\Pi$$

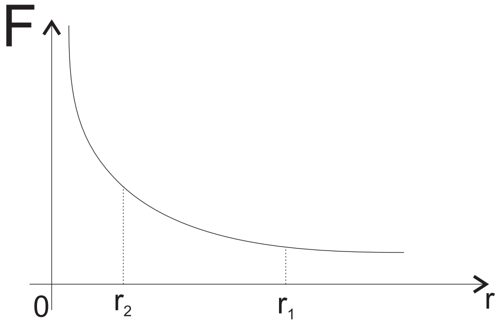
Причем эта формула будет справедлива при любом выборе нулевого уровня потенциальной энергии.

NB! При решении задач, в случае использования понятия потенциальной энергии, на рисунке обязательно указывать нулевой уровень потенциальной энергии.

7.15.2 Потенциальная энергия в поле тяготения.

Полученная формула для расчета потенциальной энергии тела, поднятого над Землей, справедлива только вблизи поверхности Земли. Как же будет выглядеть потенциальная энергия тела, находящегося на любом расстоянии от Земли, а также для двух любых тел со сферически симметричным распределением масс.

При перемещении тела с расстояния r_1 на расстояние r_2 гравитационная сила будет меняться по величине. Поэтому для расчета работы построим график зависимости силы от расстояния



Согласно закону всемирного тяготения сила тяготения между двумя точечными телами на расстоянии r_1 равна

$$F_1 = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_1^2}$$

Предположим, что под действием этой силы тела сблизились до расстояния r_2, в этом случае сила тяготения будет равна:

$$F_2 = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_2^2}$$

Работа будет равна площади под графиком. Для этого можно разбить участок $r_1 - r_2$ на множество мелких участков, на каждом из которых можно будет считать силу постоянной. И далее просуммировать все маленькие площади, устремив число интервалов разбиения к бесконечности. Тогда получится

$$A = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_1}$$

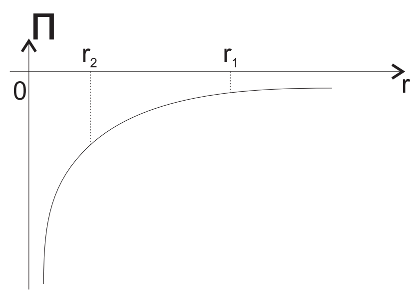
Эта работа была произведена за счет потенциальной энергии тяготения:

$$A = -(\Pi_2 - \Pi_1)$$

Сопоставив полученные выражения получим:

$$\boxed{\Pi = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} + C}$$

Очевидно, что при очень больших r энергия тяготения стремится к нулю, так как на большом расстоянии между телами стремятся к нулю силы взаимодействия между ними. И именно на бесконечно большом расстоянии между телами выбирают ноль потенциальной энергии их взаимодействия и в этом случае аналогично $C = 0$.



При уменьшении же расстояния между телами потенциальная энергия уменьшается, этим и объясняется появление в формуле знака минус (силы тяготения - силы притяжения).

Чтобы тело могло покинуть поле тяготения Земли ("выбраться из потенциальной ямы"), ему надо сообщить такую скорость, чтобы его кинетическая энергия была больше абсолютного значения потенциальной энергии, т.е. полная энергия тела должна быть положительна $E_k - E_п > 0$.

Из этих условий можно вычислить минимальную скорость, чтобы тело могло покинуть поле тяготения, т.е. определить вторую космическую скорость:

$$\frac{mv^2}{2} = \gamma\frac{mM_0}{R_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{II} = \sqrt{2\frac{M_0}{R_0}}}$$

Пользуясь $g_0 = \gamma\frac{M_0}{R_0}$, получаем

$$v_{II} = \sqrt{2g_0R_0} = \sqrt{2}v_I \approx 11,2\text{км}/c$$

7.15.3 Потенциальная энергия упруго деформированной пружины

Нами уже было получено выражение для работы силы упругости

$$A = -(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}) = -(\Pi_2 - \Pi_1)$$

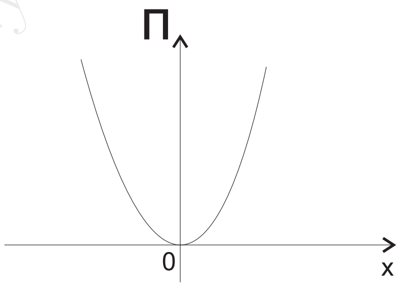
В полученном выражении знак минус указывает на то, что при совершении работы силой упругости потенциальная энергия деформированной пружины убывает.

Выражение

$$\boxed{\Pi = \frac{kx^2}{2} + C}$$

называют потенциальной энергией упруго деформированной пружины.

Графиком зависимости потенциальной энергии от удлинения пружины будет парабола.



7.15.4 Работа консервативных сил

Работа против консервативных сил приводит к увеличению потенциальной энергии.

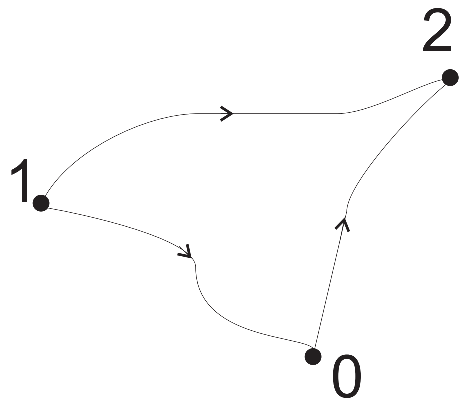
Th *Теорема о потенциальной энергии*

Law ➡ ***Работа консервативной силы равна изменению потенциальной энергии с обратным знаком***

$$\boxed{A_{\text{конс}} = -\Delta\Pi}$$

Доказательство:

Рассмотрим движение тела из точки 1 в точку 2 по произвольной траектории. Поскольку работа консервативных сил не зависит от формы траектории изменим движение так, что тело пройдет через точку нулевой потенциальной энергии - 0.



Тогда

$$A_{12} = A_{10} + A_{02} = A_{10} - A_{20} = \Pi_1 - \Pi_2 = -\Delta\Pi$$

Замечание 1: Если значение потенциальной энергии зависит от выбора состояния с нулевой потенциальной энергией, то $\Delta\Pi$ изменение потенциальной энергии не зависит, т.е. изменение потенциальной энергии является величиной абсолютной.

Замечание 2: Величина потенциальной энергии не зависит от выбора *системы отсчета*. Но работа зависит! Здесь и проявляется то, что потенциальная энергия это энергия взаимодействия, а ее изменение определяется работой сил действующих на ОБА тела. При переходе от одной СО к другой меняются обе работы, а их сумма остается постоянной.

7.16 Закон сохранения энергии и закон изменения энергии

Рассмотрим систему тел. На каждое тело входящее в систему, могут действовать как внутренние силы, так и внешние. Работу всех сил можно представить, как сумму работ внешних сил и работ внутренних сил

$$A_{\text{всех сил}} = A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр}}$$

В свою очередь работу внутренних сил представим, как сумму работ внутренних диссипативных сил и внутренних консервативных сил:

$$A_{\text{внутр}} = A_{\text{внутр дисс}} + A_{\text{внутр конс}}$$

Тогда работу всех сил можно представить как

$$A_{\text{всех сил}} = A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр дисс}} + A_{\text{внутр конс}}$$

По теореме о кинетической энергии работа всех сил должна быть равна изменению кинетической энергии тела.

$$A_{\text{всех сил}} = \Delta K = K_2 - K_1$$

А согласно теореме о потенциальной энергии работа консервативных сил равна изменению потенциальной энергии с обратным знаком.

$$A_{\text{внутр конс сил}} = -\Delta\Pi = \Pi_1 - \Pi_2$$

Тогда

$$A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр дисс}} + \Pi_1 - \Pi_2 = K_2 - K_1$$

$$A_{\text{внеш}} + A_{\text{внутр дисс}} = \Pi_2 + K_2 - \Pi_1 - K_1 = (\Pi_2 + K_2) - (\Pi_1 + K_1) = E_2 - E_1$$

где $E = K + E_{\Pi}$ - полная механическая энергия тела
Если система замкнута ($A_{\text{внеш}} = 0$) , тогда можно сформулировать закон изменения энергии.
Закон изменения энергии

Law → ***В замкнутой системе работа внутренних диссипативных сил равна изменению полной механической энергии тела***

$$\boxed{A_{\text{внутр дисс}} = \Delta E} \tag{6}$$

В отсутствии диссипативных сил или в случае, если их работа равна нулю, получаем закон сохранения энергии:

$$\Delta E = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = K + \Pi = const}$$

Закон сохранения энергии

Law ➡ ***В замкнутой системе, в которой не действуют диссипативные силы (или $A_{\text{дисс.сил}} = 0$,) полная механическая энергия сохраняется.***

Пример I: рассмотрим замкнутую систему "Земля - камень, поднятый над поверхностью Земли".

За счет консервативной силы тяготения камень падает на поверхность Земли. Закон сохранения энергии можно записать в следующем виде:

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = const$$

В общем случае:

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2$$

Если в верхней точке камень покоится, то начальная кинетическая энергия равна нулю. В момент падения потенциальная энергия камня относительно Земли равна нулю, тогда

$$mgH = \frac{mV^2}{2}$$

Отсюда получаем известную из кинематики формулу $v = \sqrt{2gH}$

В данном примере энергия не создается и не уничтожается, а только превращается из одной формы в другую: из кинетической в потенциальную или наоборот.

Пример II: Рассмотрим систему, состоящую из двух шариков массой m_1 и m_2, соединенных пружиной жесткостью k.

Для такой системы, в которой действует только консервативная сила упругости, закон сохранения энергии можно записать в следующем виде:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} + \frac{k(\Delta x)^2}{2} = const$$

где Δx - удлинение пружины.

Замечание:

В любой реальной системе, состоящей из больших макроскопических тел, действуют силы трения, т.е. диссипативные силы. Поэтоиу в замкнутой системе механическая энергия убывает.

$$\Delta E = A_{\text{дис.сил}} < 0$$

Например, постепенно затухают колебания маятника, останавливается машина с выключенным двигателем и т.д.

7.16.1 О правильном понимании простых вещей.

1. Известно, что сила трения может поднять тело на движущемся с постоянной скоростью траснпортере. Не означает ли это, что сила трения увеличивает потенциальную энергию системы "кирпич - Земля".

   Мы знаем, что за изменение потенциальной энергии отвечают только консервативные силы ($A_{\text{конс.сил}} = -\Delta E_{\text{п}}$). Но сила трения неконсервативна. В данном случае положительная работа силы трения равна минус работе составляющей силы тяжести вдоль наклонной ленты транспортера. Т.о. консервативная сила тяжести совершает отрицательную работу, следовательно, увеличивается потенциальная энергия.(скорость постоянна и кинетическая энергия не меняется.)

2. Убывание механической энергии не означает, что энергия исчезает бесследно. В действительности происходит переход энергии из механической формы в другие. Обычно при работе сил трения скольжения тела нагреваются, или, как говорят, увеличивается их внутренняя энергия.

   При действии в системе тел диссипативных сил механическая энергия убывает, переходя при этом в другие формы энергии.

7.17 Столкновения

Def. Под столкновением или ударами понимают кратковременное взаимодействие тел.

При столкновении возникают такие большие силы, что другими силами можно пренебречь. Поэтому соударяющиеся тела можно рассматривать, как изолированную систему. Поэтому при всех видах удара будет сохраняться импульс системы, причем в векторном виде.

При ударе кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел переходит в энергию деформации. В результате удара происходит перераспределение энергии между соударяющимися телами.

Столкновения принято разделять на центральные и нецентральные, по тому как направлены скорости тел до столкновения.

Def. Центральное столкновение - столкновение, при котором векторы скоростей до удара направлены по прямой, соединяющей центры масс тел.

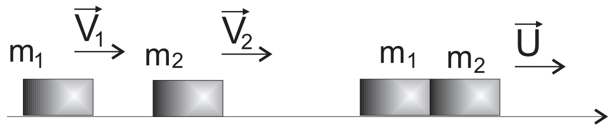
Также принято выделять два предельных случае по признаку сохранения энергии.

Def. Абсолютно упругий удар - удар, при котором общая механическая энергия системы остается неизменной.

Def. Абсолютно неупругий удар - удар, после которого тела движутся с одинаковой скоростью, как единое целое

7.17.1 Абсолютно неупругий удар

Два тела массой m_1 и m_2 неупруго центрально соударяются со скоростями v_1 и v_2 соответственно. Определить конченую скорость и потери энергии.



Запишем закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$$

После проецирования найдем:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Изменение энергии будет равно изменению кинетической энергии системы:

$$\Delta E = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} =$$

$$= \frac{(m_1 + m_2)\frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2}{(m_1+m_2)^2} - m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2}{2} =$$

$$= \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 - m_1^2 v_1^2 - m_1 m_2 v_1^2 - m_1 m_2 v_2^2 - m_2^2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)} = -\frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Изменение энергии получилось отрицательным, т.е. в результате абсолютно неупругого удара энергия уменьшилась.

Проанализируем получившуюся формулу:

- $m_2 \gg m_1, \quad v_2 = 0$

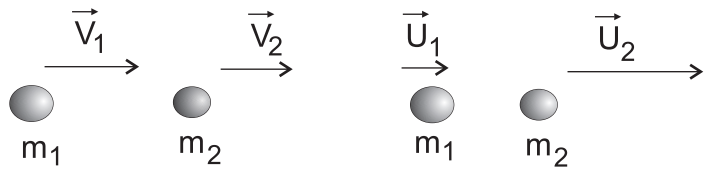
  Тогда $\Delta E = -\frac{m_1 v_1^2}{2(m_1/m_2+1)} = -\frac{m_1 v_1^2}{2}$, т.е. почти вся кинетическая энергия ударяющегося тела перейдет во внутреннюю.

- $m_1 \gg m_2, \quad v_2 = 0$

  Тогда $u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{v_1}{1 + m_2/m_1} = v_1$

7.17.2 Абсолютно упругий удар

Два шарика массой m_1 и m_2 сталкиваются абсолютно упруго и центрально со скоростями v_1 и v_2 соответственно. Определить конченые скорости тел.



Запишем закон охранения импульса и закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}$$
$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$$

Отсюда получаем

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2)$$
$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2)$$

Тогда

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2 \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_2 + v_2 - v_1$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_2 + m_1v_2 - m_1v_1 + m_2u_2$$

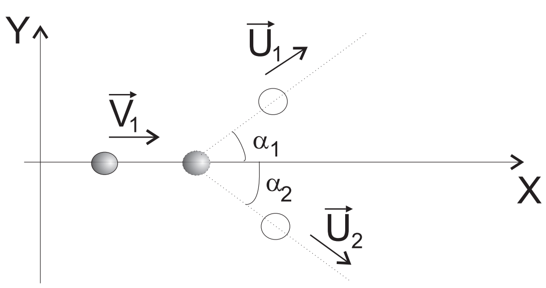
$$m_1v_1 + m_2v_2 - m_1v_2 + m_1v_1 = (m_1 + m_2)u_2$$

$$\boxed{u_2 = \frac{2m_1v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}}$$

Аналогично можно получить выражение для u_1:

$$\boxed{u_1 = \frac{2m_2v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}}$$

Пример задачи: Бильярдный шар 1, движущийся со скоростью 10 м/с, ударил о покоящийся шар 2 такой же массы. После удара шары разошлись так, как показано на рисунке. Найти скорости шаров после удара, если $m_1 = m_2 = m$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.



Решение:
Применим закон сохранения импульса системы двух шаров:

$$\vec{P} = \vec{P_0}$$

Спроецируем на два направления:

$$\begin{matrix} "x" : P_x = P_{0x} \\ "y" : P_y = P_{0y} \end{matrix} \iff \begin{matrix} "x" : m_1 u_1 \cos\alpha_1 + m_2 u_2 \cos\alpha_2 = m_1 v_1 \\ "y" : m_1 u_1 \sin\alpha_1 - m_2 v_2 \sin\alpha_2 = 0 \end{matrix}$$

Поскольку $m_1 = m_2 = m$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, из проекции на ось y получаем:

$$u_1 = u_2 = u$$

Тогда подставив эти величины в проекцию на ось x получим:

$$mv_1 = mu\cos\alpha + mu\cos\alpha = 2mu\cos\alpha$$

$$u = \frac{v_1}{2\cos\alpha} = 7{,}1\text{м}/c$$