2 Кинематика.

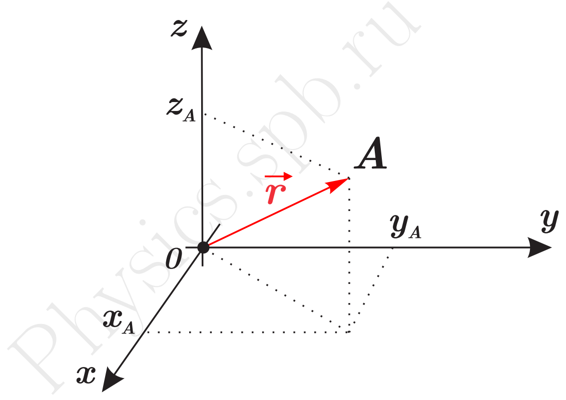
Def. Кинематика - раздел механики, который описывает механическое движение, отвлекаясь от физических причин, его вызывающих.

Выбор системы отсчета в кинематике определяется исключительно соображениями удобства при математическом описании. Никаких принципиальных преимуществ у одной системы отсчета по сравнению с другой в кинематике нет (преимущества определенного класса систем отсчета - инерциальных систем - выявляются только в динамике.)

2.1 Кинематические характеристики движения.

2.1.1 Радиус-вектор.

Положение точки в пространстве по отношению к выбранной системе отсчета характеризуется тремя координатами - x, y, z.



Def. Вектор соединяющий начало координат с данной точкой называется радиус-вектором.

При этом если спроецировать радиус-вектор на числовые оси, то проекции будут равны декартовым координатам точки. Таким образом, чтобы задать положение точки в пространстве можно задать либо декартовы координаты, либо задать радиус-вектор.

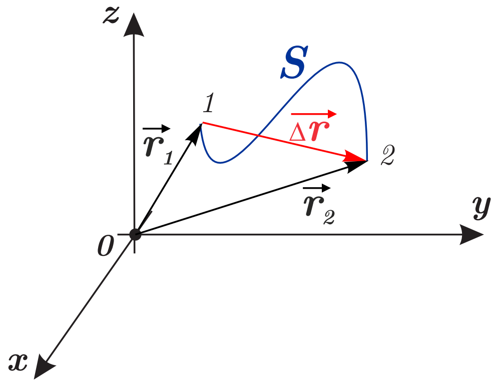
NB!

Движение материальной точки математически описано полностью, если известен ее радиус-вектор, как функция времени $\vec{r}(t)$, т.е. должны быть известны три скалярные функции в зависимости от времени $x(t)$,$y(t)$,$z(t)$

Т.о. для описания механического движения достаточно написать одно векторное уравнение или три скалярных уравнения, т.е получение $\vec{r}(t)$ и есть решение ОЗМ для данной материальной точки.

2.1.2 Перемещение. Траектория. Путь.

При движении материальной точки, радиус-вектор описывающий ее положение будет меняться.



Def. Перемещение это вектор соединяющий точку начала движения с точкой конечного положения тела.

Вектор соединяющий начальное и конечное положение движущейся точки, равен разности векторов $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, т.к. если посмотреть на рисунок, то можно увидеть, что вектора $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ и вектор перемещения образуют треугольник, тогда по правилу сложения векторов:

$$\vec{r}_1 + \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Def. Линия, которую описывает конец радиус-вектора $\vec{r}(t)$ при движении материальной точки, называется траекторией движения.

Или иначе:

Def. Множество последовательных положений, занимаемых материальной точкой в процессе движения, образует в пространстве линию, называемую траекторией движения точки.

Def. Путь это длина траектории пройденная телом за данный промежуток времени.

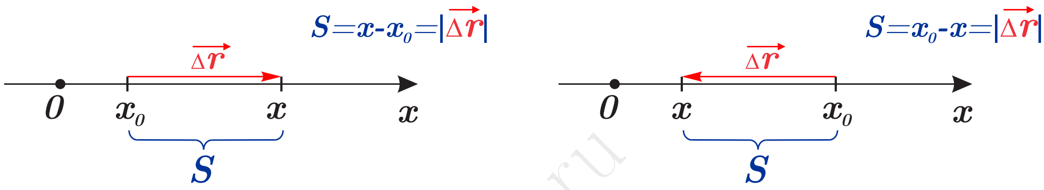
В общем случае путь и величина перемещения это разные вещи. Например рассмотрим движение материальной точки по окружности. Предположим, что она сделала ровно один оборот. В этом случае величина перемещения будет равна нулю $|\Delta\vec{r}| = 0$, т.к. начальная и конечная точки совпадают, а путь будет равен длине окружности $S = 2\pi r$, т.е. отличен от нуля.

Вопрос: За что мы платим в такси, за путь или за перемещение?

__Заметим что:__

NB!

- *Путь - величина скалярная, а перемещение - векторная.*
- *Путь может только увеличиваться, а величина перемещения может уменьшаться, например при движении по окружности.*
- *В случае прямолинейного движения __в одном направлении__ путь и величина перемещения совпадают.*



Т.е. если тело двигалось все время по прямой в одном направлении, параллельном координатной оси, то путь можно найти по следующей формуле:

$$\boxed{S = |x - x_0|} \tag{1}$$

Рассматривая прямолинейное движение, можно отметить, что все точки тела будут двигаться одинаково, т.е. прямолинейное движение является примером поступательного движения. И в этом случае, будет удобно воспользоваться **моделью материальной точки**. Т.е. все законы в случае прямолинейного движения будут записаны для материальной точки.

В случае криволинейного движения, мы так же будем пренебрегать формами и размерами тела, поэтом и для криволинейного движения так же будет применяться модель материальной точки.

NB!

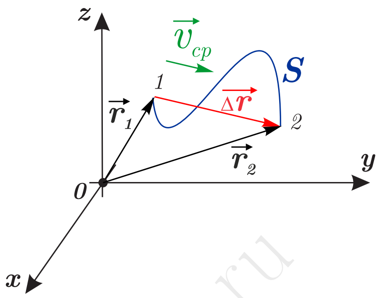
В кинематике прямолинейного и криволинейного движения будет рассматриваться в качестве тела модель материальной токи. За исключением случаев, когда нужно будет учитывать форму и размеры тела.

2.2 Скорость. Понятие средней и мгновенной скорости.

Рассмотрим движение двух тел. Пусть они последовательно перемещаются по одной траектории и при этом первое тело перемещается из точки 1 в точку 2 за меньшее время, чем второе. В этом случае мы привыкли говорить, что первое тело движется **быстрее** второго тела.

В классической механике для того, чтобы количественно оценить быстроту перемещения тела в пространстве, ввели понятие *скорости.*

Def. Для характеристики быстроты движения тела вводится понятие скорости.



$$\begin{aligned} t_1 :&\quad \vec{r_1} \\ t_2 = t_1 + \Delta t :&\quad \vec{r_2} \end{aligned}$$

Пусть за время Δt перемещение равно $\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$. Тогда

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}} \tag{2}$$

Def. Отношение вектора перемещения к промежутку времени называется средней по времени скоростью движения (перемещения) тела.

Заметим, что если бы мы определили характеристику быстроты обратным отношением $\frac{\Delta t}{\Delta r}$, тогда эта величина показывала бы за какое время тело проходит единицу пути, что характеризовало бы *медленность*, а не быстроту движения материальной точки.

Def. Скорость - физическая величина, которая характеризует направление и быстроту перемещения точки (тела) в пространстве и показывает каково перемещение точки за единицу времени (1 с)

Из уравнения (2) видно, что вектор средней скорости сонаправлен (т.к. $\Delta t > 0$) с вектором перемещения тела.

$$\vec{v} = \frac{1}{\Delta t}\cdot\Delta\vec{r} \qquad \Delta t > 0 \Rightarrow \frac{1}{\Delta t} > 0 \Rightarrow \vec{v} \upuparrows \Delta\vec{r}$$

При этом величина вектора указанная на рисунке является произвольной, т.к. скорость и перемещение измеряются в различных единицах, и не могут иметь единый масштаб в данной системе координат.

Нередко под средней скоростью понимают скалярную величину, которую определяют как отношение пути к промежутку времени, за который этот путь пройден. Эту скорость принято называть средней скоростью прохождения пути.

$$\boxed{v^s = \frac{S}{\Delta t}} \tag{3}$$

Средняя скорость перемещения и средняя скорость прохождения пути являются разными величинами. Во-первых одна величина векторная, а другая скалярная. Во-вторых величина скорости перемещения и скорости прохождения пути будут совпадать только в случае *прямолинейного движения в одном направлении*, во всех остальных случаях это будет не так.

$$|\vec{v}_{\text{ср}}| = |\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}| \leqslant v^s_{\text{ср}} = \frac{S}{\Delta t}$$

Мгновенная скорость.

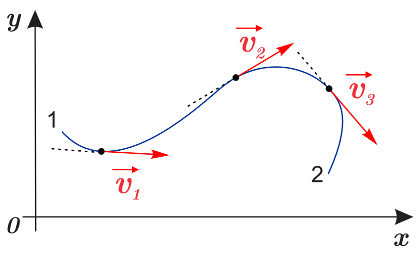
В случае сложного движения, когда скорость движения меняется, для характеристики быстроты движения принято говорить о мгновенной скорости, т.е. скорости в данный момент времени (именно эту скорость показывает спидометр автомобиля).

Для того, чтобы определить мгновенную скорость, рассмотрим скорость на очень маленьком промежутке времени, т.е. устремим $t_1 \to t_2$. Тогда можно считать, что тело практически не сдвинулось с места, т.е. $\vec{r_1} \to \vec{r_2}$ и $\vec{\Delta r} \to 0$.

Def. Отношение $\frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$ будет стремиться к некоторому пределу (конечному значению), который называют мгновенной скоростью.

$$\boxed{\vec{v}_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}} \tag{4}$$

При $\Delta t \to 0$ перемещение $\vec{\Delta r}$ уменьшается по модулю и поворачивается, приближаясь к направлению касательной к траектории в данной точке. Т.е. в предельном случае:



Def. Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории в данной точке.

2.3 Равномерное прямолинейное движение движение.

2.3.1 Определение. Уравнение координаты.

Def. Движение, при котором тело за **любые** равные промежутки времени проходит равные пути(либо перемещения), называется равномерным.

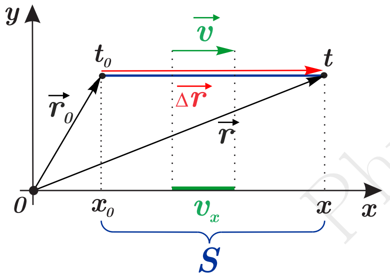
При равномерном прямолинейном движении скорость остается постоянной как по величине, так и по направлению.

$$\vec{v} = \vec{v} = const$$

Т.к. мы будем рассматривать прямолинейное движение *в одном направлении*, то путь и величина перемещения совпадают (см. уравнение (1)).

Решить основную задачу механики для равномерного прямолинейного движения, это означает найти закон, определяющий координата тела меняется с течением времени (при движении вдоль координатной оси) или в общем случае, как радиус-вектор меняется с течением времени.

$$t = t_0 \quad : \vec{r}_0$$
$$t = t_0 + \Delta t \quad : \quad \vec{r}$$



Из рисунка видно, что три вектора $\vec{r}_0$, $\vec{r}$ и $\vec{\Delta r}$ образуют треугольник, тогда

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \Delta\vec{r}$$

Из определения скорости (2) можно выразить перемещение

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\vec{r} = \vec{v} \cdot (t - t_0)$$

Подставим перемещение и запишем уравнение для радиус вектора:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0)} \qquad (5)$$

Данное уравнение является решением основной задачи механики для равномерного прямолинейного движения. NB!

Если спроецировать векторное уравнение на координатную ось OX, то получим уравнение для координаты x:

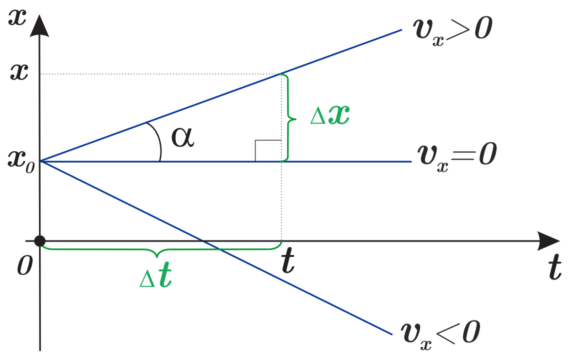
$$x(t) = x_0 + v_x(t - t_0) \qquad (6)$$

где v_x проекция скорости на ось x. В случае, если материальная точка движется вдоль оси x, то проекция совпадает с величиной скорости.

2.3.2 Графическое описание.

Для описания движения можно использовать не только уравнения, но и графики. Они позволяют более наглядно, не вдаваясь в формулы, определить характер движения тела.

График координаты



$$x(t) = x_0 + v_x t$$
$$t_0 = 0, \quad x_0 = x(0)$$

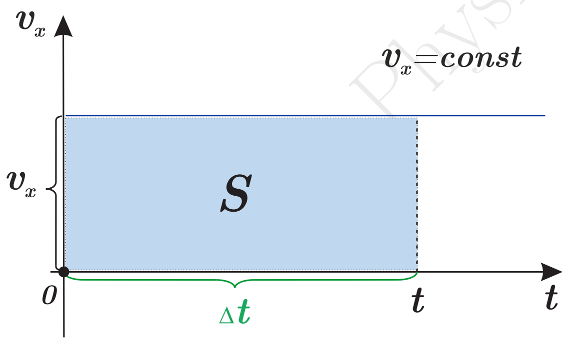
Из уравнения координаты (6) равномерного прямолинейного движения видно, что координата линейно зависит от времени, поэтому графиком координаты будет являться прямая, наклон которой будет определяться скоростью движения.

При этом если координата тела растет с течением времени, значит тело движется в направлении оси OX, а если уменьшается то против оси OX.

Def. Тангенс угла наклона графика координаты численно равен проекции скорости на ось этой же координаты.

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x} \tag{7}$$

График скорости



Поскольку величина скорости остается постоянной, графиком скорости является прямая, параллельная оси времени. Если взять определенный промежуток времени и численно (без размерности) найти площадь под графиком, то она совпадет с величиной пройденного пути. При этом на осях графика, величины должны быть отложены в системе СИ

$$\boxed{S = v_x \cdot \Delta \cdot t = S_\square} \tag{8}$$

Def. Площадь под графиком скорости численно равна пути, пройденному телом за время Δt

2.3.3 Единицы измерения скорости:

Def. За единицу измерения скорости принимают скорость такого равномерного прямолинейного движения, при котором материальная точка за единицу времени(1с) проходит единицу пути (1м)

$$1\frac{\text{км}}{\text{ч}} = \frac{1000\text{м}}{3600\text{с}} = \frac{10\text{м}}{36\text{с}} \approx 0,28\frac{\text{м}}{\text{с}}$$
$$1\frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{3600\text{км}}{1000\text{ч}} = 3,6\frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

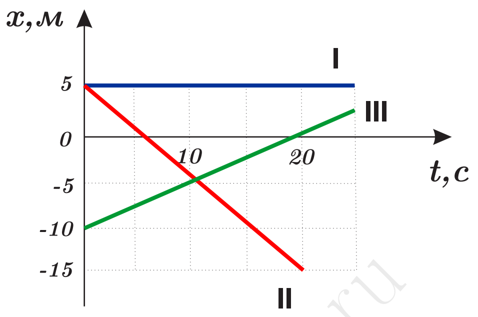
2.3.4 Примеры задач на равномерное движение.

Пример 1 По заданным графикам написать уравнения движения тел x=x(t). Из уравнений графиков найти координаты тел через 5 с, скорости их движения, время и место встречи тел II и III.

Дано:

$t = 5c$
$x_I(t), x_{II}(t)$–? $x_{III}(t)$–? $x_I(5c), x_{II}(5c)$–? $x_{III}(5c)$–?

Решение:



Запишем уравнения соответсвующие графикам

$x_I = 5$

$x_{II} = 5 - t$

$x_{III} = -10 + 0.5t$

Найдем координаты тел через 5с:

$$x_I(5c) = 5$$
$$x_{II}(5c) = 5 - 5 = 0$$
$$x_{III}(5c) = -10 + 0.5 \cdot 5 = -7.5$$

Определим место и время встречи:

$$x_{II} = 5 - t = -10 + 0.5t = x_{III}$$

$$1.5t = 15 \quad \Rightarrow \quad t = 10c$$

$$x_{II} = 5 - 10 = -5\text{м}$$

Ответ: *Через 5 с первое тело будет продолжать покоится в точке с координатами 5 м, второе будет двигаться со скоростью 1 м/с против координатной оси OX и находится в начале отсчета, третье будет двигаться со скоростью 0,5 м/с в направлении оси OX и находится в точке с координатами -7,5 м. Второе и третье тела встретятся через 10 с после начала движения, в точке с координатами* -5 *м.*

Пример 2 Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно l, одновременно навстречу друг другу начали двигаться два тела: первое со скоростью v_1, второе - v_2. Определить, через сколько времени они встретятся и расстояние от точки A до места их встречи.

Дано:

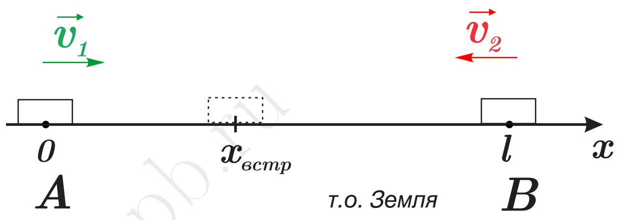
v_1, v_2
l

$x-?$
$t-?$

Решение:

1. Поскольку оба тела начали двигаться одновременно, время которое двигалось первое тело до встречи равно времени второго тела.

$$t_1 = t_2 = t$$



2. Запишем уравнения движения каждого тела

$$x_1(t) = 0 + v_1 t$$
$$x_2(t) = l - v_2 t$$

Тела встретились, значит у них будут одинаковые координаты.

$$x_1(t) = x_2(t) \quad \Rightarrow \quad v_1 t = l - v_2 t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{l}{v_1 + v_2}$$

Тогда подставив это время в уравнение движение первого тела получим координату точки встречи

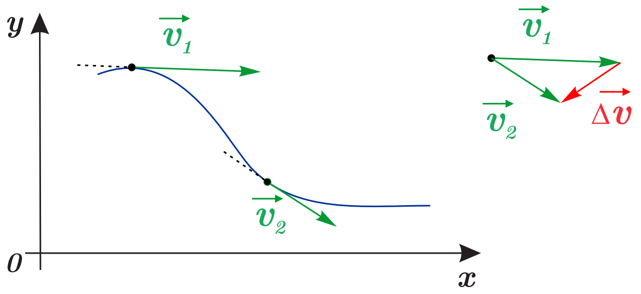
$$\boxed{x = \frac{l v_1}{v_1 + v_2}}$$

Ответ: $x = \frac{l v_1}{v_1 + v_2}$, $t = \frac{l}{v_1 + v_2}$

2.4 Ускорение.

Мы решали основную задачу механики в простейшем случае движения тела с постоянной скоростью. Решением было нахождение зависимости $x = x(t)$ в случае прямолинейного движения или $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в общем случае.

Если при движении материальной точки скорость тела меняется, то для характеристики быстроты изменения вектора скорости вводят ускорение.



В момент времени t_1 скорость тела равнялась $\vec{v_1}$, в момент t_2 - $\vec{v_2}$. В общем случае $\vec{v} = \vec{v}(t)$. За интервал времени $\Delta t = t_2 - t_1$ скорость изменилась на $\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$.

Тогда в качестве ускорения примем:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}} \tag{9}$$

Def. Среднее ускорение показывает на сколько изменилась скорость за единицу времени

Из определения видно, что ускорение - вектор, сонаправленный с изменением скорости (а не со скоростью).

Если устремить $\Delta t \to 0$, то мы получим выражение для мгновенного ускорения:

$$\boxed{\vec{a}_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}} \tag{10}$$

2.5 Равнопеременное прямолинейное движение.

2.5.1 Определение равнопеременного прямолинейного движения.

Def. Движение, при котором скорость тела за **любые** равные промежутки времени изменяется на одну и ту же величину, называется равнопеременным движением.

При таком движении ускорение тела остается постоянным, при этом мгновенное и среднее ускорение совпадают.

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{мгн}} = const \tag{11}$$

Единицы измерения ускорения:
Теперь мы можем определить единицу для измерения ускорения.

Def. За единицу ускорения принято ускорение такого равнопеременного движения, при котором тело изменяет скорость на 1 метр в секунду за 1 секунду.

$$[a] = \frac{1\text{м}/c}{1c} = 1\frac{\text{м}}{c^2} \tag{12}$$

2.5.2 Уравнение скорости. График скорости и ускорения.

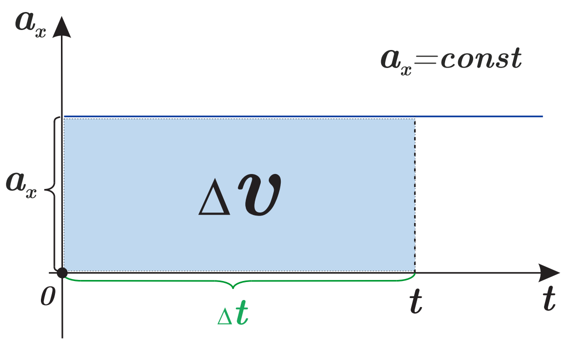
Получим выражение для скорости, как функции от времени $\vec{v}(t)$

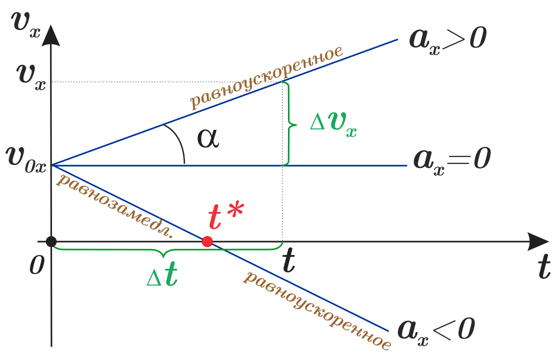
$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\Delta t = \vec{v} - \vec{v}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\Delta t + \vec{v}_0 = \vec{v}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\Delta t} \tag{13}$$

Это уравнение называется уравнением скорости равнопеременного движения. Видно, что для того, чтобы определить скорость в какой-либо момент времени, надо знать скорость в начальный момент времени, ускорение и время.

$$a_x = const \qquad\qquad \begin{aligned} &v_x = v_{0x} + a_x t \\ &t_0 = 0, \quad v_{0x} = v_x(0) \end{aligned}$$





Def. Площадь под графиком ускорения численно совпадает с изменением скорости

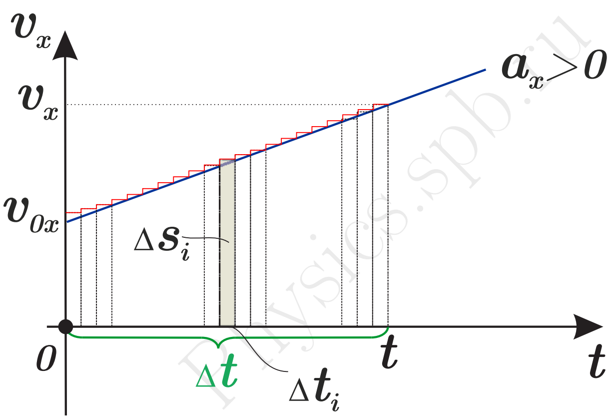
$$\boxed{\Delta v_x = v_x - v_{x0} = a_x \Delta t} \tag{14}$$

Def. Тангенс наклона графика скорости к оси времени, численно совпадает с проекцией ускорения

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = a_x} \tag{15}$$

2.5.3 Уравнение координаты.

Необходимо получить уравнение вида $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Рассмотрим для этого график зависимости проекции скорости v_x от времени. Вспомним, что в случае равномерного движения площадь под графиком численно совпадала с величиной пройденного пути. Будет ли это так, для неравномерного движения?



$v_x = v_{0x} + a_x t$

$t_0 = 0, \quad v_{0x} = v(0)$

Для этого разобьём интервал по времени на очень маленькие промежутки Δt_i. Промежутки должны быть настолько малы, что можно считать скорость v_i на этих промежутках постоянной. Тогда площадь под графиком на каждом промежутке $s_i^{\square}$ численно равна пути. Если просуммировать площади всех малых промежутков при $\Delta t_i \to 0$, то мы получим, что площадь под всем гарфиком скорости совпадает с величиной пути, причем это не зависит от того, каким образом выглядит зависимость $v(t)$.

Таким образом:

$$\Delta t = \sum_i \Delta t_i$$

$$\Delta t_i : v_i = const \quad \Rightarrow \quad S_i = S_i^{\square} = v_i \Delta t_i$$

$$S = \sum_i S_i = \sum_i v_i \Delta t_i = S_{\square}$$

Def. Площадь под графиком скорости численно совпадает с величиной пройденного пути.

Тогда для прямолинейного движения *в одном направлении* (в этом случае $S = x(t) - x_0$) можно записать:

$$S = x(t) - x_0 = \frac{v + v_{0x}}{2}\Delta t = \frac{v_{0x} + a_x\Delta t + v_{0x}}{2}\Delta t = v_{0x}\Delta t + \frac{a_x\Delta t^2}{2} \tag{16}$$

Т.о. получили уравнение для координаты x:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{a_x(t - t_0)^2}{2} \tag{17}$$

Если движение происходит не параллельно какой-либо из осей, то можно записать аналогичные уравнения для других координат y, z. Тогда все три скалярных уравнения можно записать одним векторным:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{\vec{a}(t - t_0)^2}{2}} \tag{18}$$

Уравнение (17) называется уравнением координаты равнопеременного прямолинейного движения, а уравнение (18) называется уравнением перемещения равнопеременного прямолинейного движения.

2.5.4 Средняя скорость равнопеременного движения.

Def. Средней скоростью неравномерного движения называется средняя скорость такого равномерного движения, при котором тело за тоже самое время проходит тот же путь.

Таким образом, используя формулу (16) получаем:

$$S = \frac{v_{0x} + v_x}{2}\Delta t = v_{\text{ср}}\Delta t \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{v_{\text{ср}} = \frac{v_0 + v}{2}} \tag{19}$$

Последняя формула справедлива только для равнопеременного движения.

2.5.5 Связь пути, ускорения и скорости, без учета времени.

Иногда бывают случаи, когда движение надо охарактеризовать без расчета времени. Для этого необходимо решить следующую систему, исключив из нее время:

$$\begin{cases} v = v_0 + a\Delta t \\ S = v_0\Delta t + a\dfrac{\Delta t^2}{2} = \dfrac{v_x + v_{0x}}{2}\Delta t \end{cases}$$

Тогда

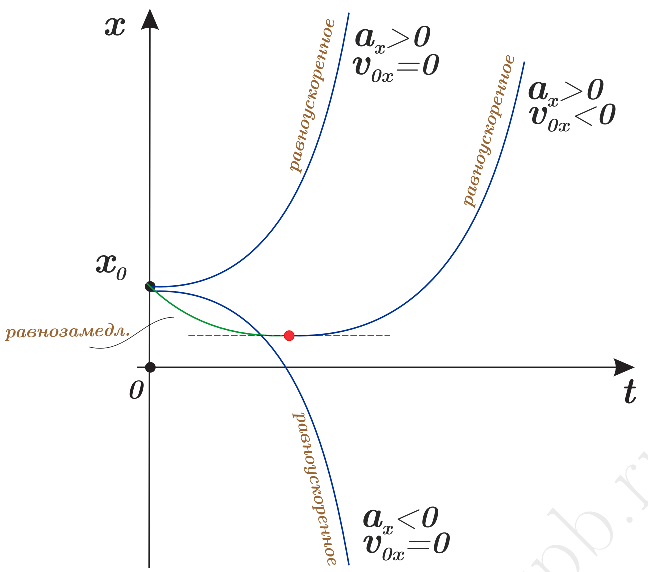
$$a = \frac{v_x - v_{0x}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$$

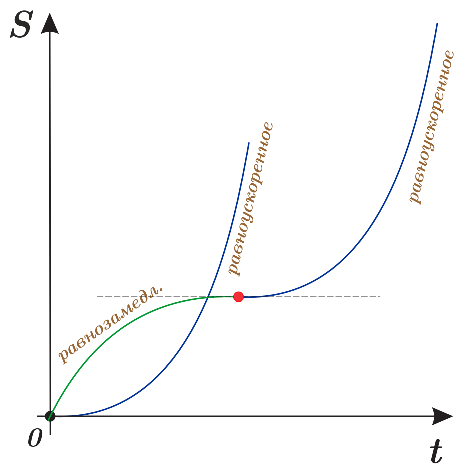
$$\boxed{v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_xS} \tag{20}$$

Данную формулу стоит применять в задачах, когда время не дано и не требуется его найти. Выводить формулу в решение при этом не требуется.

2.5.6 Графическое описание.

Из уравнения (17) видно, что графиком координаты будет являться парабола, т.к. зависимость координаты от времени квадратичная.

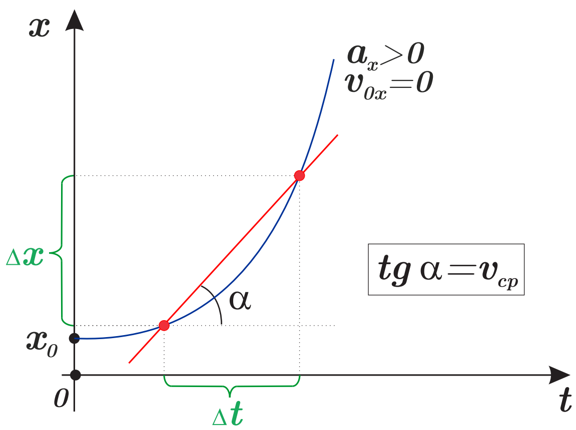


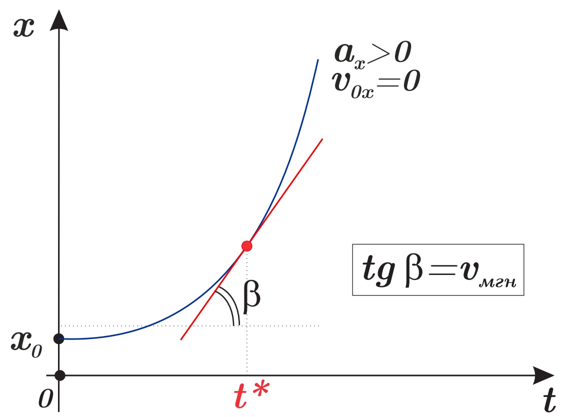


Def. Размах параболы зависит от величины ускорения. Чем больше ускорение тем меньше размах.

Поскольку путь это длина траектории, то эта величина всегда положительна, причем в момент начала движение (или начала наблюдения) она равна нулю.

Def. График пути всегда начинается из нулевой точки и лежит в положительной области.





Если провести секущую к параболе. Тогда

Def. Тангенс угла наклона секущей численно равен средней скорости движения на данном интервале.

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_{\text{ср}}} \tag{21}$$

Если при этом устремить $\Delta t \to 0$, то секущая постепенно перейдет в касательную к некоторой точке графика. Тогда

Def. Тангенс угла наклона касательной численно равен мгновенной скорости в данной точке.

$$\boxed{\operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{\Delta x}{\Delta t} = v_{\text{мгн}}} \tag{22}$$

2.5.7 Свойство равнопеременного движения.

Рассмотрим движение тела из состояния покоя ($v_0 = 0$). Тогда за первую секунду тело пройдет путь:

$$S_I = S_1 = \frac{at^2}{2} = \frac{a}{2}$$

За первые две секунды:

$$S_2 = \frac{at^2}{2} = \frac{4a}{2}$$

За вторую секунду:

$$S_{II} = S_2 - S_1 = \frac{4a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$$

Аналогично за третью секунду:

$$S_{III} = S_3 - S_2 = \frac{9a}{2} - \frac{4a}{2} = \frac{5a}{2}$$

Отсюда получаем:

$$\boxed{S_I : S_{II} : S_{III} = 1 : 3 : 5} \tag{23}$$

Def. Если движение тела равноускоренное с нулевой начальной скоростью, то пути, пройденные телом за последовательные равные промежутки времени, относятся как последовательные нечетные числа.

Рассмотрим следующий случай: тело за первую секунду прошло 3 м, за вторую 9 м, за третью 15м. Каков вид движения?

$$S_I : S_{II} : S_{III} = 3 : 9 : 15 = 1 : 3 : 5$$

т Следовательно, тело двигалось равноускоренно.

А если например тело за первую секунду прошло 3 м, вторую - 4м, третью - 5м,то такое движение будет *ускоренным*, но не будет *равноускоренным*

2.6 Пример оформления задачи на равнопеременное движение

Пример 1 (1.6.1) Шарик, скатываясь с наклонного желоба из состояния покоя, за первую секунду прошел путь 10 см. Какой путь он пройдет за три секунды?

1.6.1

Дано:

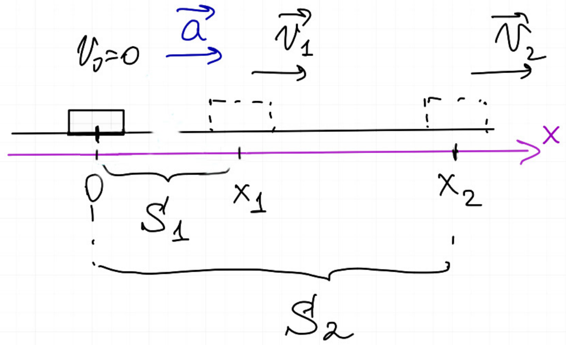
$v_0 = 0\ \frac{м}{с}$

$t_1 = 1с$

$S_1 = 0{,}1м$

$t_2 = 3с$

$S_2 - ?$



Т.О. Земля

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

(x) $$x = 0 + 0\cdot t + \frac{a\cdot t^2}{2}$$

$$x(t) = \frac{at^2}{2}$$

$$S = |x - \overset{=0}{x_0}| = |x| = x = \frac{at^2}{2}$$

$$S_1 = \frac{at_1^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2S_1}{t_1^2}$$

$$S_2 = \frac{at_2^2}{2} = \frac{2S_1}{t_1^2}\cdot\frac{t_2^2}{2} = \frac{\cancel{2}\cdot 0{,}1}{1^2}\cdot\frac{3^2}{\cancel{2}} = 0{,}9\ м$$

$$[S_2] = \frac{м\cdot \cancel{с^2}}{\cancel{с^2}} = м$$

Ответ: $S_2 = 0{,}9м$

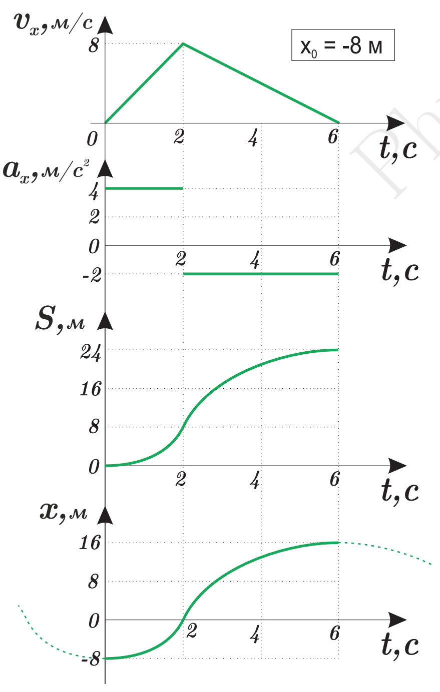
2.7 Графические задачи

Существует класс задач, где в качестве исходных данных является график зависимости $v_x(t)$ или $x(t)$. При этом требуется описать движение на каждом участке и построить зависимости пройденного пути от времени $S(t)$, ускорения от времени $a_x(t)$ и $x(t)$ либо $v_x(t)$, в зависимости от данного графика.

При решении таких задач, необходимо учитывать свойства графиков, а также следующие моменты:

- При анализе графика $v_x(t)$ учитывать наклон графика к координатным осям
- Если материальная точка совершала движение только в *одном направлении*, графики пути и координаты будут выглядеть одинаково.
- Учитывать направление скорости и ускорения относительно друг-дурга. Например, при $a_x < 0$ и $v_x < 0$ движение будет равноускоренным.
- В тот момент времени t^*, когда $v_x(t^*) = 0$, касательная к графику пути и координаты будет параллельна оси времени.

Рассмотрим пример такой задачи. Пусть дан график зависимости проекции скорости на ось x и начальная координата $x_0 = -8$ м. Требуется описать характер движения, построить графики $S(t), x(t), a_x(t)$, найти весь пройденный путь и среднюю скорость.



По графику проекции скорости видно, что проекция скорости сначала линейно возрастает от нуля до 8м/с и при этом остается положительной и потом линейно же убывает, так же до нуля и так же остается положительной. Таким образом *на первом участке тело движется равноускоренно в направлении оси OX, а на втором участке тело движется равнозамедленно до полной остановки, тоже в направлении оси OX.*

Найдем теперь ускорение на каждом участке. Воспользуемся определением ускорения в проекции на ось OX:

$$a_{Ix} = \frac{v_x(2) - v_x(0)}{t_2 - t_0} = \frac{(8-0)\text{м}/c}{(2-0)c} = 4\text{м}/c^2$$

$$a_{IIx} = \frac{v_x(6) - v_x(2)}{t_6 - t_2} = \frac{(0-8)\text{м}/c}{(6-2)c} = 2\text{м}/c^2$$

График ускорения будет выглядеть, как горизонтальные линии на соответствующих участках, т.к. при равноускоренном и равнозамедленном движении ускорение по величине остается постоянным.

Найдем, пути пройденные телом на каждом участке. Для этого воспользуемся свойством графика скорости, а именно что площадь под этим графиком численно совпадает с величиной пройденного пути.

$$S_I = \frac{8 \cdot 2}{2} = 8\text{м} \qquad S_{II} = \frac{8 \cdot (6-2)}{2} = 16\text{м}$$

График пути всегда начинается из нуля и всегда не убывает. Поскольку на первом участке движение равноускоренное, то графиком будет являться парабола, ветви которой направлены вверх. Вершина этой параболы будет в точке $t = 0$, т.к. в этот момент времени скорость тела равна нулю.

На втором участке движение равнозамедленное и с другим по величине ускорением, поэтому ветви параболы будут направлены вниз, размах параболы будет отличаться от первого участка. Вершина второй параболы будет в момент $t = 6$ с, т.к. в этот момент скорость тела равна нулю.

При переходе от параболы на первом участке к параболе на втором участке, изломов быть не может, переход плавный. Т.к. в точке перехода при $t = 2$ с, тангенс угла наклона касательной к графику определяет мгновенную скорость и она будет одинаковой в конце первого участка и в начале второго. Если бы был излом графика, это соответствовало мгновенному изменению скорости, т.е. скачку скорости, что не возможно на практике.

Теперь рассчитаем координаты и построим график координаты от времени. Найдем координату в конце первого участка.

$$S_I = |x(2) - x(0)| = x(2) - x_0 \quad \Rightarrow \quad x(2) = x_0 + S_I = -8\text{м} + 8\text{м} = 0$$

$$S_{II} = |x(6) - x(2)| = x(6) - x(2) \quad \Rightarrow \quad x(6) = x(2) + S_{II} = 0 + S_{II} = 16\text{м}$$

$$S_{\text{весь}} = S_I + S_{II} = 8\text{м} + 16\text{м} = 24\text{м}$$

Поскольку проекция скорости была все время положительной, тело двигалось все время в направлении оси OX, поэтому модуль в разности координат (см. выше) можно убрать. А также поэтому график координаты, будет полностью повторять график пути, только со сдвигом на начальную координату, в нашем случае со сдвигом на -8 м. Если бы проекция скорости на каких-то участках была отрицательной, то в этом случае график пути продолжал бы возрастать, а координата начинала бы уменьшаться, т.к. тело двигалось бы против оси OX. Графически это бы означало, что график координаты на соответствующем участке был бы зеркально отражен относительно горизонтальной оси.

Найдем теперь среднюю скорость.

$$v_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{весь}}}{\Delta t} = \frac{24\text{м}}{6c} = 4\text{м}/c$$

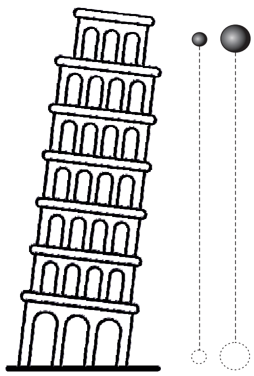
2.8 Движение тел вдоль вертикали относительно Земли.

2.8.1 Свободное падение тел.

Примером равноускоренного движения является свободное падение.

Def. Свободным падением называется движение только под действием силы тяжести.

До Галилея, согласно учению Аристотеля считалось, что более массивное тело будет падать быстрее более легкого.



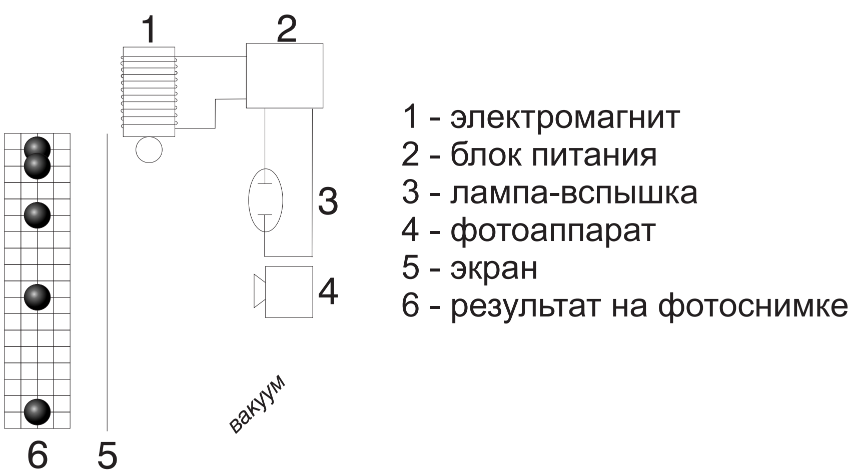
Великий итальянский физик Галилео Галилей в 1589 году, сбрасывая ядра разной массы с Пизанской башни, установил, что тела вне зависимости от массы падают одинаково быстро, т.е. за одно и тоже время.

Галилей так описывает знаменитый мысленный эксперимент в своей книге «О движении»: *Представьте себе два предмета, один из которых тяжелее другого, соединённых верёвкой друг с другом, и сбросьте эту связку с башни. Если мы предположим, что тяжёлые предметы действительно падают быстрее, чем лёгкие и наоборот, то лёгкий предмет должен будет замедлять падение тяжёлого. Но поскольку рассматриваемая система в целом тяжелее, чем один тяжёлый предмет, то она должна падать быстрее него. Таким образом мы приходим к противоречию, из которого следует, что изначальное предположение (тяжёлые предметы падают быстрее лёгких) — неверно.*

Рассмотрим далее эксперимент с трубкой Ньютона. Если в стеклянную трубку поместить тела разной массы перышко, дробинку и кусок пробки, то в вакууме все тела будут падать с одинаковой скоростью. Если же впустить воздух, то перышко будет заметно отставать.

Это говорит о том, что в отсутствии сил сопротивления, все тела движутся с одинаковым ускорением.

Рассмотрим более современный опыт по изучению свободного падения тел:



Стальной шарик закреплен при помощи электромагнита. Лампа-вспышка выключена и вся установка находится в темноте. Вся установка помещена в вакуум. В момент отключения электромагнита, шарик начинает свободно падать. Одновременно с этим вспышка будет срабатывать через равные промежутки времени, подсвечивая положение шарика. Фотоаппарат будет вести съемку с бесконечной выдержкой, т.е. на один кадр.

Окажется, что пути пройденные шариком за первую, вторую и третью секунды относятся как нечетные числа.

$$\frac{S_I}{S_{II}} = \frac{1}{3} \qquad \frac{S_{II}}{S_{III}} = \frac{3}{5}$$

А это является характерным свойством равнопеременного движения. Поэтому можно сделать следующий вывод: *падение шарика является равноускоренным движением.* Аналогично можно провести эксперимент с любым телом.

При помощи данного эксперимента, зная время срабатывания вспышки и рассчитав положение шарика, можно определить величину ускорения:

$$a = 9.81\frac{\text{м}}{c^2}$$

Def. Итак, все тела вблизи поверхности Земли ($h << R$) падают в вакууме равноускоренно с одним и тем же ускорением, называемым ускорением свободного падения.

$$\boxed{g = 9.81\tfrac{\text{м}}{c^2}} \tag{24}$$

2.8.2 Движение тел вдоль вертикали.

Поскольку свободное падение является равнопеременным движением, то для его описания можно использовать уравнения равнопеременного движения. Рассмотрим пример задачи на свободное падение тела.

Пример 1

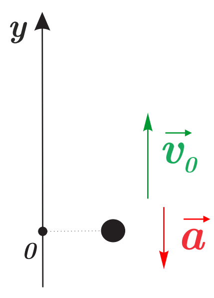
Из некоторой точки относительно Земли вертикально вверх брошен камень с начальной скоростью 10м/с. Установить, где он окажется через 3 с от начала движения, если сопротивление среды отсутствует? С какой скоростью и куда он будет двигаться?

Дано:
$v_0 = 10$м$/c$
$t = 3c$
$g = 9,8$м$/c^2$

$y-?$

Решение:

1. Камень - материальная точка. Движение происходит вблизи поверхности Земли, следовательно $g = const$



2. СО - Земля, начало отсчета - точка бросания, отсчет времени ведется с момента бросания. Направление координатной оси выберем вверх. Такой выбор удобен, когда начальная скорость направлена вертикально вверх.

$$t_0 = 0$$
$$y_0 = 0$$
$$\vec{a} = \vec{g}$$

3. Векторное уравнение равнопеременного движения для перемещения и для скорости:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \tfrac{\vec{g} \cdot t^2}{2}$$
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t$$

4. Проекция на данную систему координат с учетом начальных условий:

$$y(t) = v_0 t - \tfrac{gt^2}{2}$$
$$v_y(t) = v_0 - gt$$

5. Подставляем численные значения:

$$y(3) = 10 \cdot 3 - \tfrac{9{,}8 \cdot 3^2}{2} = -14,1(\text{м})$$
$$v_y(3) = 10 - 9,8 \cdot 3 = -19,4\text{м}/c$$

6. Проверка размерности:

$$[y] = \frac{\text{м}}{c}c - \frac{\text{м}}{c^2}c^2 = \text{м}$$

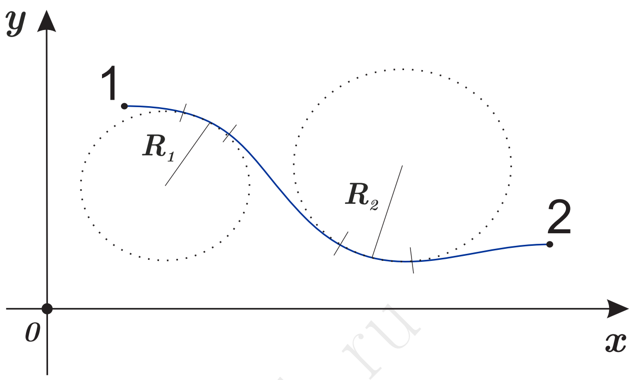
$$[v_y] = \frac{\text{м}}{c} - \frac{\text{м}}{c^2}c = \frac{\text{м}}{c}$$

Ответ: *Тело будет находится ниже точки броска на 14,1 м и двигаться вниз со скоростью 19,4 м/с*

2.9 Равномерное движение по окружности.

2.9.1 Определение.

Для чего необходимо изучать движение по окружности? Чтобы изучить сложное движение, необходимо исследовать простейшие виды, такие как прямолинейное равномерное и равноускоренное, движение по окружности. Предположим, что тело движется из точки 1 в точку 2 по сложной траектории.



Тогда можно аппроксимировать эту траекторию набором прямолинейных участков и дуг окружностей разных радиусов. Движение по прямой мы уже изучили. Поэтому, если мы будем знать каким образом тело будет двигаться по этим окружностям, мы сможем рассчитать его местоположение на данной траектории в любой момент времени, т.е. решить основную задачу механики для движения по сложной траектории.

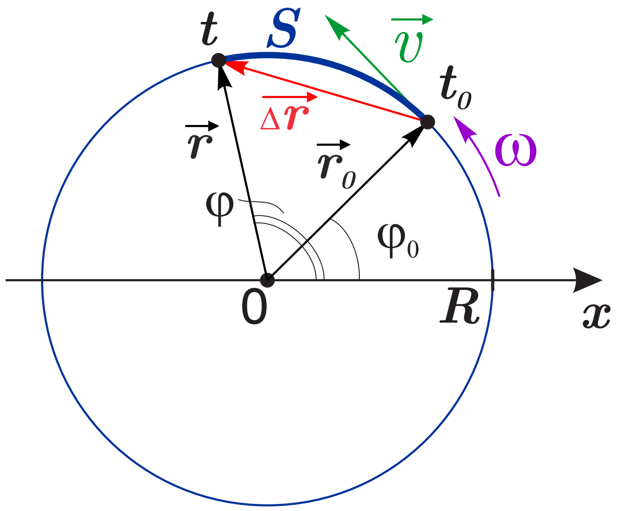
Def. Движение материальной точки по окружности, при котором эта точка за любые равные промежутки времени проходит равные дуги, называется равномерным движением по окружности

Примеры: педаль велосипеда, точки Земной поверхности, точки колеса и т.д.
Особенности равномерного движения по окружности:

- повторяемость, периодичность
- равномерное движение по окружности, как и всякое криволинейное движение, есть движение с переменной скоростью, т.к. вектор скорости все время меняет свое направление.

2.9.2 Основные характеристики.

Для того, чтобы задать положение точки на окружности, достаточно задать радиус-вектор. Причем для данной окружности длина радиус-вектора будет одной и той же, а разным будет угол φ относительно некоторого выделенного направления.



Период: T

Def. Период - время, в течении которого, материальная точка делает один полный оборот.

$$\boxed{T = \frac{\Delta t}{N}} \tag{25}$$

Примеры: $T_{\text{секунд.стрелки}} = 1\text{мин}$, $T_{\text{мин.стрелки}} = 1\text{час}$

Частота:

Def. Частота - физическая величина, которая показывает число оборотов радиус-вектора за единицу времени

$$\boxed{\nu = \frac{N}{\Delta t}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T} \tag{26}$$

Единицы измерения: $[\nu] = c^{-1} = \text{Гц}(\text{Герц})$

Путь:

$$\boxed{S = \Delta\varphi r} \tag{27}$$

где r - радиус окружности, $\Delta\varphi$ - угол на который повернулся радиус-вектор.

Если взять время $\Delta t = T$, тогда

$$\Delta\varphi = 2\pi \Rightarrow S = 2\pi r$$

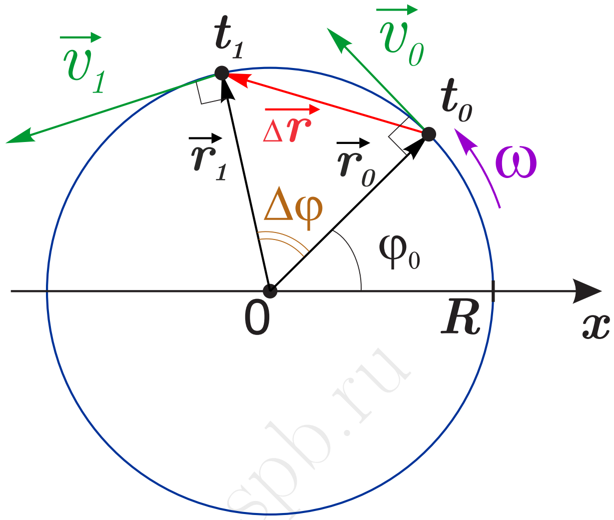
Скорость:

Чем сложнее движение, тем больше скоростей характеризует такое движение.

Def. Линейная скорость - векторная физическая величина, показывающая, какой путь (какую длину дуги) проходит конец радиус-вектора за единицу времени.

$$\boxed{v = \frac{S}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T}} \qquad (28)$$

Def. В каждой точке окружности линейная скорость направлена по касательной к окружности.



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Def. Угловая скорость - величина, показывающая на какой угол перемещается радиус-вектор точки за единицу времени.

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}} \qquad (29)$$

Единицы измерения: $[\omega] = \frac{\text{рад}}{c}$

Def. Радианом называется центральный угол, длина дуги которого равна радиусу

Сколько в окружности радиан?

$$\varphi = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi(\text{радиан})$$

Физический смысл единицы угловой скорости:

Def. За единицу угловой скорости принимается угловая скорость такого равномерного движения точки по окружности, при котором радиус-вектор за 1 с поворачивается на угол в 1 радиан

Взаимосвязь характеристик:

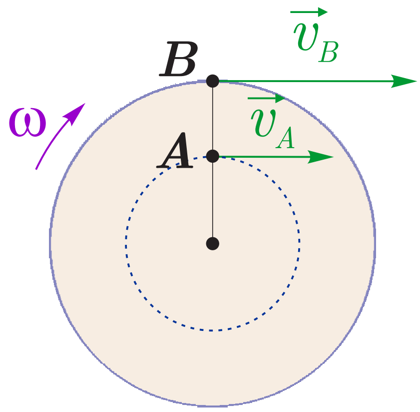
$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r\nu$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

$$\boxed{v = \omega r} \qquad (30)$$

Последняя формула показывает связь линейной и угловой скорости. Например, рассмотрим движение двух точек на сплошном диске. Точка A находится ближе к центру диска, а точка B дальше. Поскольку диск сплошной, обе точки будут вращаться с одинаковой угловой скоростью (будут сдвигаться на один и тот же угол за единицу времени), а линейные скорости будут разными.



$$\begin{matrix} \omega_A = \omega_B \\ R_A < R_B \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad v_A < v_B$$

Точка B движется с большей линейной скоростью чем точка A.

2.9.3 Зависимость угла от времени

Получим зависимость угла от времени при равномерном движении по окружности. Из определения угловой скорости легко получить:

$$\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 + \omega(t - t_0)} \qquad (31)$$

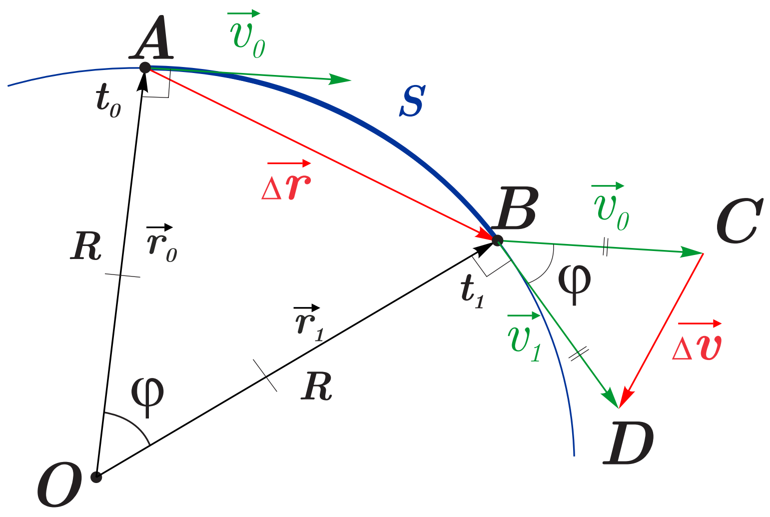
Видно, что это уравнение очень похоже на уравнение (5), описывающие равномерное прямолинейное движение. Угол φ является аналогом координаты (действительно для описания положения тела на окружности достаточно задать только угол относительно некоторого выделенного направления), ω аналогом скорости в прямолинейном движении. Т.о. можно предположить, что

Def. любое равномерное движение можно описать линейным уравнением

.

2.9.4 Ускорение при движении по окружности.

Ускорение в прямолинейном движении характеризует собой изменение скорости в единицу времени по величине, в равномерном движении по окружности величина линейной скорости остается постоянной, но при этом меняется направление скорости, т.к. в каждой точке окружности она направлена по касательной, т.о. при равномерном движении по окружности ускорение будет характеризовать быстроту изменения скорости по направлению.



Пусть материальная точка равномерно движется по окружности из точки A в точку B. При этом

$$|\vec{v}_0| = |\vec{v}_1| = v$$

по модулю скорости в точке A и B одинаковые, а по направлению разные. В каждой точке угол между радиус-вектором и скоростью равен 90^0. (Т.к. касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания).

Перенесем параллельно вектор $\vec{v}_0$ в точку B. Тогда $\vec{CD}$ будет равно вектору $\vec{\Delta v}$.

$$\vec{\Delta v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_0$$

Рассмотрим треугольники OAB и BCD. Угол $\varphi = \angle CBD$, как углы при взаимно перпендикулярных сторонах.

$|OA| = |OB|$, т.к. это радиусы одной окружности.

$|BC| = |BD| = v$, т.к. величина скорости не меняется.

Таким образом треугольники OAB и BCD подобны по углу и двум сторонам. Из подобия треугольников можно получить следующие равенство:

$$\frac{|AB|}{|AO|} = \frac{|CD|}{|BC|}$$

$$|AO| = R \quad |BC| = v$$
$$|CD| = \Delta v \quad |AB| = ?$$

где R - радиус окружности

Чтобы найти мгновенное ускорение необходимо устремить $\Delta t \to 0$, тогда длина дуги $|AB|$ будет равна длине хорды, т.е.

$$|AB| = S = v\Delta t, \quad \Delta t \to 0$$

Таким образом:

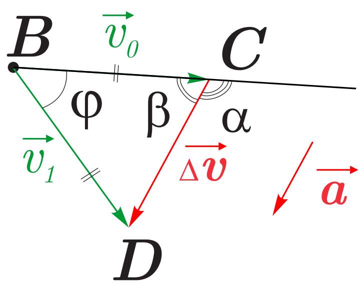
$$\frac{v\Delta t}{R} = \frac{\Delta v}{v}, \quad \Delta t \to 0$$
$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{vv}{R}, \quad \Delta t \to 0$$

Отсюда находим величину мгновенного ускорения:

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R}} \tag{32}$$

2.9.5 Направление центростремительного ускорения.

Мы определили только величину мгновенного ускорения при равномерном движении по окружности. Определим теперь и направление.



Вектор мгновенного ускорения сонаправлен с вектором изменения скорости при $\Delta t \to 0$.

$$\vec{a}_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Вектор среднего ускорения составляет с вектором скорости угол

$$\alpha = \pi - \beta$$

Тогда, т.к. треугольник BCD равнобедренный

$$\alpha = \pi - \frac{\pi - \varphi}{2} = \frac{2\pi - \pi + \varphi}{2} = \frac{\pi + \varphi}{2}$$

Чтобы узнать направление мгновенного ускорения, необходимо устремить $\Delta t \to 0$, тогда угол $\varphi \to 0$

$$\boxed{\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{\pi + \varphi}{2} = \tfrac{\pi}{2}} \tag{33}$$

Def. При равномерном движении материальной точки по окружности точка движется с ускорением, направленным перпендикулярно вектору скорости, т.е. по радиусу к центру, поэтому это ускорение называется нормальным или центростремительным.

2.9.6 Анализ формулы центростремительного ускорения.

Формула центростремительного ускорения (32) показывает, как должна изменяться величина ускорения при изменении величины скорости тела или радиуса окружности, по которой происходит движение.

$\underline{R = const, v_1 < v_2}$

Если радиус окружности один и тот же, то чем больше линейная скорость, тем больше должно быть центростремительное ускорение. Причем если скорость в 2 раза больше, то ускорение в 4 раза больше.

$\underline{v = const, R_1 < R_2}$

Если величина скорости остается постоянной, а радиус поворота изменить, тогда, чем меньше радиус поворота, тем больше изменение скорости.

Связь центростремительного ускорения с угловой скоростью

Если воспользоваться формулой для линейной скорости через угловую $v = \omega R$ и подставить ее в формулу центростремительного ускорения (32), тогда получится формула связывающая центростремительное ускорение с угловой скоростью:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 \cdot R^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

$$\boxed{a_n = \omega^2 \cdot R} \tag{34}$$

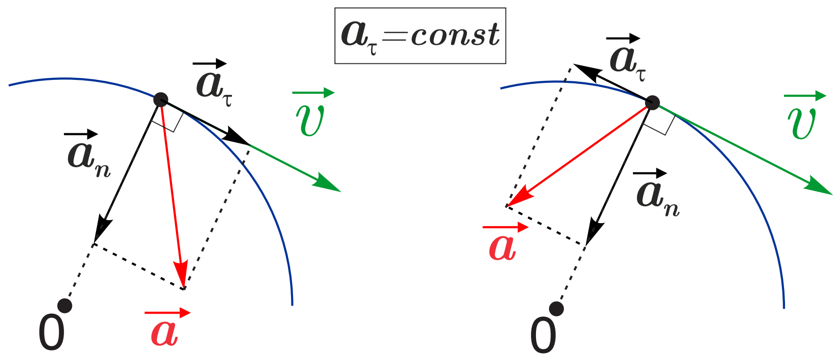
На первый взгляд может показаться, что в формулах есть противоречие: в исходной формуле (32) $a \sim \frac{1}{R}$, а в (34) $a \sim R$. Но никакого противоречия нет. Если $v = const$, то $a \sim \frac{1}{R}$, если $T = const, \nu = const$ или $\omega = const$, тогда $a \sim R$. И это два разных случая. NB!

Также можно получить связь центростремительного ускорения с периодом и частотой.

T	ν
$a_n = \frac{v^2}{R}$	$v = 2\pi R\nu$
$v = \frac{2\pi R}{T}$	$a_n = \frac{4\pi^2 R^2 \nu^2}{R} =$
$a_n = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2 R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$	$= 4\pi^2 R\nu^2$

2.9.7 Ускорение при неравномерном движении по окружности.

В случае неравномерного движения по окружности, помимо центростремительного ускорения, появляется так называемое тангенциальное ускорение, которое отвечает только за изменение величины скорости.



равноускоренное движение по окружности *равнозамедленное движение по окружности*

Поскольку тангенциальное ускорение не влияет на направление скорости, оно должно быть сонаправлено (или противоположено направлено) вектору скорости, т.е. перпендикулярно центростремительному ускорению.

Тогда

Def. Полным ускорением при неравномерном движении по окружности является векторная сумма центростремительного и тангенциального ускорения.

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau}$$

Если мы знаем нормальное и тангенциальное ускорения, для того, чтобы найти полное ускорение, надо воспользоваться Теоремой Пифагора:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

Если же известно полное ускорение, и угол между полным ускорением и вектором скорости составляет α, тогда можно найти нормальное и тангенциальное ускорение следующим образом:

$$|\vec{a}_n| = |\vec{a}| \sin \alpha$$
$$|\vec{a}_\tau| = |\vec{a}| \cos \alpha$$

Если $a_n = 0$, тогда мы получаем случай равноускоренного прямолинейного движения, если же $a_\tau = 0$ - случай равномерного движения по окружности.

При равнопеременном движении по окружности величина тангенциального ускорения остается постоянным, а нормально ускорение будет изменяться, т.к. будет меняться величина скорости:

$$\begin{cases} a_\tau = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = const \\ a_n(t) = \dfrac{v^2(t)}{R} \neq const \end{cases}$$

2.10 Пример оформления задачи на равномерное движение по окружности

Пример 1 (1.8.7) Найти центростремительное ускорение точек колеса автомобиля, соприкасающихся с дорогой, если автомобиль движется со скоростью 72 км/ч и при этом частота вращения колеса 8 Гц.

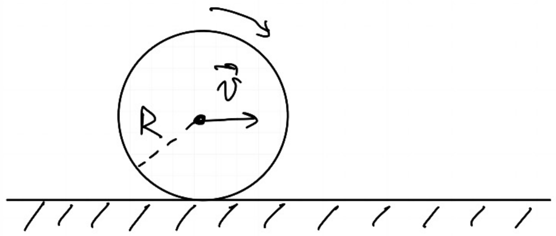
1.8.7.

Дано:

$v = 72\ \frac{км}{ч} = 20\ \frac{м}{с}$

$\nu = 8$ Гц

a_n - ?



Т.О. Земля

Т.К. колесо катится без проскальзывания

$v_{вращения} = v$

За один оборот, т.е $\Delta t = T$

$\pi \cdot 2R = v \cdot T = v \frac{1}{\nu}$

$\Rightarrow R = \frac{v}{2\pi\nu}$

Тогда $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v^{\cancel{2}}}{\cancel{v}} \cdot 2\pi\nu = 2\pi\nu v =$

$= 2 \cdot 3{,}14 \cdot 8 \cdot 20 = 1004\ \frac{м}{с^2}$

$[a_n] = Гц \cdot \frac{м}{с} = \frac{1}{с} \cdot \frac{м}{с} = \frac{м}{с^2}$

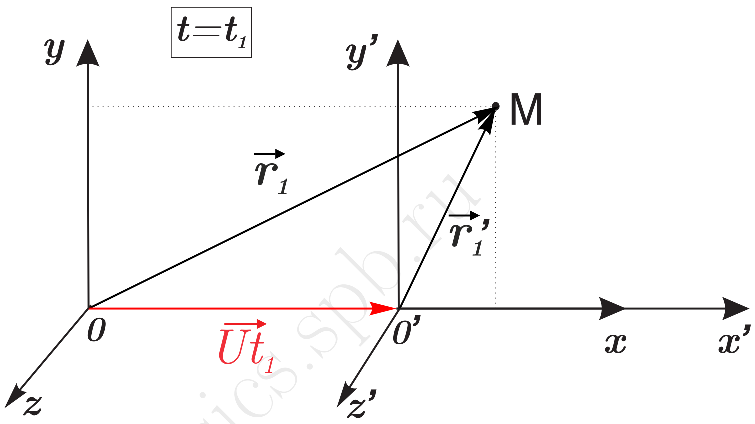
Ответ: $a_n = 1004\ \frac{м}{с^2}$

2.11 Преобразования Галилея.

Покажем, что в различных системах отсчета характеристики одного и того же движения выглядят по разному. Выясним, как найти перемещение и скорость по отношению к неподвижной системе отсчета, если известны эти характеристики в движущейся системе и характеристики самой движущейся системы.

Рассмотрим две системы отсчета: подвижную (штрихованную) и неподвижную (нештрихованную.) Пусть в начальный момент времени они совпадают. Штрихованная система движется относительно нештрихованной со скоростью U вдоль оси x, при этом предположим, что координаты y и z не меняются.

Рассмотрим рисунок в момент времени t_1 от начала движения:

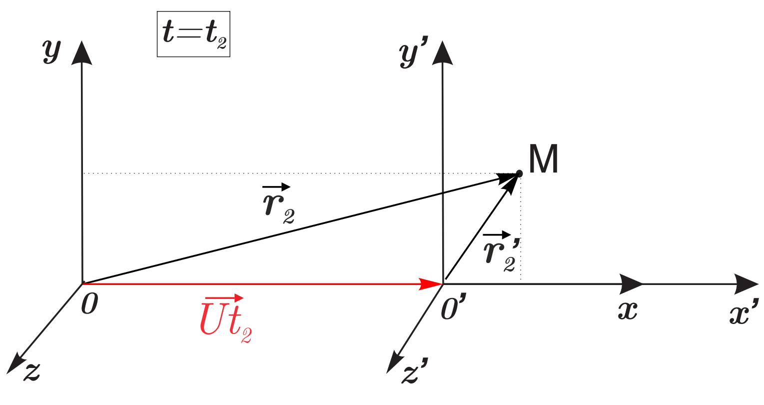


Положение точки M в неподвижной системе координат задается вектором $\vec{r}_1$, положение этой же точки в подвижной системы координат задается вектором $\overrightarrow{r}'_1$

Из рисунка видно, что три вектора $\overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r_1}'$ и $\overrightarrow{Ut_1}$ образуют треугольник, следовательно для этих векторов можно записать:

$$t = t_1 : \quad \overrightarrow{r}_1 = \overrightarrow{r_1}' + \overrightarrow{Ut_1}$$

Рассмотрим теперь момент времени t_2. Для него можно сделать аналогичный рисунок с векторами $\overrightarrow{r}_2, \overrightarrow{r_2}'$ и $\overrightarrow{Ut_2}$, которые так же будут образовывать треугольник и для которых можно записать аналогичное равенство:



$$t = t_2: \quad \vec{r}_2 = \vec{r_2}' + \overrightarrow{Ut_2}$$

Вычитая из второго уравнения первое получаем:

$$\vec{r_2} - \vec{r_1} = \vec{r_2}' - \vec{r_1}' + \vec{U}(t_2 - t_1)$$

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}\,' + \vec{U}\Delta t} \tag{35}$$

Если бы точка M перемещалась в пространстве между моментами времени t_1 и t_2, то в выводе ничего бы не изменилось, т.к. каждый раз образовывалась соответствующая тройка векторов.

Таким образом, мы получили **правило сложения перемещений**:

Def. Чтобы найти перемещение точки в неподвижной системе, надо к перемещению точки в подвижной системе отсчета векторно добавить перемещение движущейся системы отсчета относительно неподвижной.

Данное правило так же принято называть *Преобразованиями Галилея.*

Чтобы теперь получить **правило сложения скоростей** достаточно разделить уравнение (35) на Δt:

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}\,'}{\Delta t} + \frac{\vec{U}\Delta t}{\Delta t}$$

И устремив $\Delta t \to 0$ получим соотношение для мгновенных скоростей:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v'} + \vec{U}} \tag{36}$$

Def. Если скорость материальной точки относительно некоторой системы отсчета равна $\vec{v}'$, а сама эта система движется относительно другой системы отсчета со скоростью $\vec{U}$, то скорость материальной точки по отношению ко второй системе отсчета является векторной суммой $\vec{v}'$ и $\vec{U}$

Аналогичным образом можно получить преобразования для ускорений. Для этого уравнение (36) надо записать для двух моментов времени:

$$\vec{v}_1 = \vec{v'}_1 + \vec{U}_1$$
$$\vec{v}_2 = \vec{v'}_2 + \vec{U}_2$$

Вычитая из второго первое и устремляя $\Delta t \to 0$ получим соотношение для мгновенных ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a} = \vec{A}$$

где $\vec{A}$ - ускорение подвижной системы отсчета относительно неподвижной.

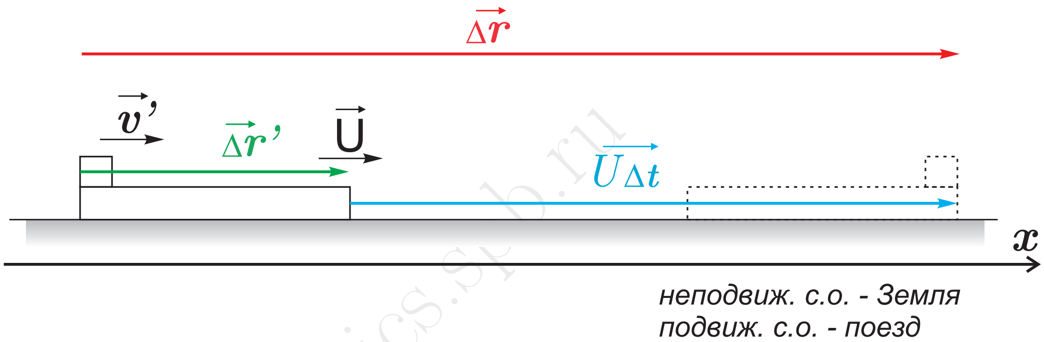
В результате получается, что если скорость $U = const$, тогда ускорения в двух системах отсчета будут одинаковыми.

2.11.1 Использование преобразования Галилея и преобразования скоростей

Рассмотрим примеры задач, в которых необходимо использовать преобразования Галилея.

Пример 1 Поезд движется равномерно и прямолинейно относительно Земли со скоростью 72 км/ч. По поезду идет человек, также равномерно и прямолинейно, со скоростью 1 м/с. Найти перемещение человека относительно Земли за 10 секунд его движения.

Рассмотри сначала случай, когда человек идет в направлении движения поезда. Поскольку просят найти перемещение человека относительно Земли, выберем систему отсчета, связанную с Землей, за неподвижную, а поезд за подвижную систему отсчета. Сделаем рисунок.



где $\vec{\Delta r}$ - перемещение человека относительно Земли, $\vec{\Delta r}'$ - перемещение человека относительно поезда, $\vec{U}\Delta t$ - перемещение поезда относительно Земли за время Δt

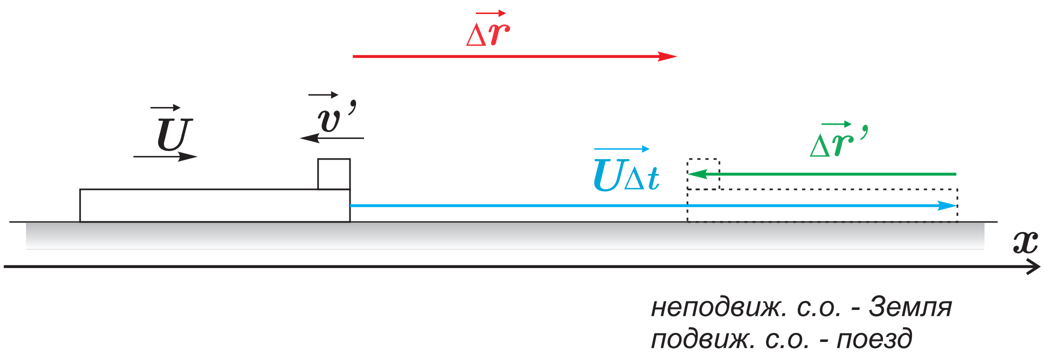
Запишем преобразования Галилея:

$$\vec{\Delta r} = \vec{\Delta r}' + \vec{U}\Delta t$$

Из рисунка видно, выполнение этого векторного уравнения для трех векторов перемещений. Спроецируем это уравнение на координатную ось X:

$$\Delta r = \Delta r' + U\Delta t = v'\Delta t + U\Delta t = (v' + U)\Delta t = (1\text{м/с} + 20\text{м/с})10\text{с} = 210\text{м}$$

Рассмотрим аналогично движение человека против движения поезда.



Запишем преобразования Галилея:

$$\vec{\Delta r} = \vec{\Delta r}' + \vec{U}\Delta t$$

Спроецируем это уравнение на координатную ось X:

$$\Delta r = -\Delta r' + U\Delta t = -v'\Delta t + U\Delta t = (-v' + U)\Delta t = (-1\text{м/с} + 20\text{м/с})10\text{с} = 190\text{м}$$

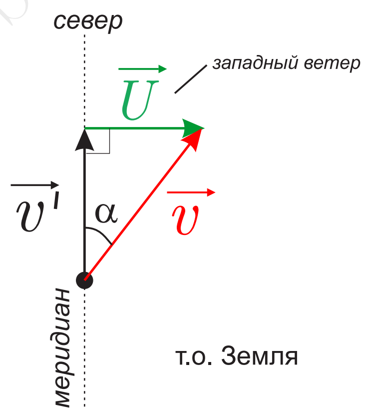
Ответ: *Перемещение человека относительно Земли равно 190 метрам.*

Пример 2 (1.10.6) Вертолет летел на север со скоростью 20 м/с . С какой скоростью и под каким углом к меридиану будет лететь вертолет, если подует западный ветер со скоростью 10 м/с ?

Дано:
$v' = 20$ м/с
$U = 10$ м/с
$\vec{v}$–?

Решение:

Рассмотрим задачу в системе отсчета связанной с Землей, будем ее считать неподвижной системой отсчета. Это будет удобно, т.к. нас спрашивают куда будет лететь самолет относительно Земли.



В качестве движущейся системы отсчета возьмем воздух, который перемещается с запада на восток со скоростью ветра.

Тогда $\vec{U}$, скорость ветра, это скорость подвижной системы отсчета относительно Земли, а $\vec{v'}$ - скорость вертолета относительно воздуха, т.е. скорость тела в подвижной системе отсчета. И просят найти скорость вертолета относительно Земли, т.е. $\vec{v}$.

По рисунку видим, что все три вектора образуют треугольник, что соответствует уравнению преобразований скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{U}$$

Треугольник получился прямоугольным, т.к. ветер западный и направлен перпендикулярно меридиану. Тогда скорость V можно найти из теоремы Пифагора:

$$v = \sqrt{v'^2 + U^2} = \sqrt{400 + 100} = \sqrt{5} \cdot 10 \text{ м/с} = 22,3 \text{ м/с}$$

А направление

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{U}{v'} = \frac{10}{20} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg} 0.5 = 26^\circ$$

Проверка размерности:

$$[v] = \sqrt{\text{м}^2/\text{с}^2 + \text{м}^2/\text{с}^2} = \sqrt{\text{м}^2/\text{с}^2} = \text{м/с} \qquad [\operatorname{tg}\alpha] = \frac{\text{м/с}}{\text{м/с}} = 1$$

Ответ: *Вертолет будет лететь со скорость 22,3 м/с под углом* 26° *к меридиану в направлении на северо-восток.*

Пример 3 Квадратный паром со стороной $l = 50$ м переправляется поперек озера. Скорость парома составляет $U = 5$ км/ч. За время переправы, равное 5 мин, человек, двигаясь из угла парома, успевает пройти поперек движения парома, до его противоположенного края. Найдите перемещение человека относительно берега.

Дано:

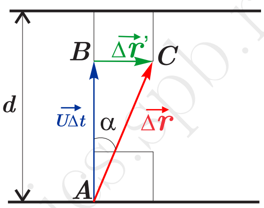
$l = 50$ м

$t = 5$ мин $= 300$ c

$U = 5$ км/ч $= 1,39$ м/c

Δr–?

Решение:



В этой задаче можно рассмотреть две системы отсчета, первая связана с Землей, а вторая с паромом. Система отсчета связанная с паромом движется с постоянной скоростью относительно неподвижной системы отсчета.

Таким образом, чтобы найти перемещение человека относительно Земли, необходимо векторно сложить перемещение человека относительно подвижной системы отсчета, т.е. плота $\Delta\vec{r}'$ и перемещение подвижной системы относительно неподвижной, т.е. плота относительно Земли $U\Delta t$.

$$|\Delta\vec{r}'| = l$$

Запишем преобразования Галилея для данной задачи:

$$\vec{\Delta r} = \vec{\Delta r}' + \vec{U}\Delta t$$

Т.к. паром движется строго перпендикулярно берегу, из преобразования Галилея получается прямоугольный треугольник и теперь воспользуемся теоремой Пифагора для этого треугольника $\triangle ABC$ и определим величину перемещения $\Delta\vec{r}$:

$$\Delta r = |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(U\Delta t)^2 + \Delta r'^2} = \sqrt{(U\Delta t)^2 + l^2} = \sqrt{(1,39 \cdot 300)^2 + 2500} \cong 420 \text{ м}$$

Проверка размерности:

$$[\Delta r] = \sqrt{(\text{м}/c \cdot c)^2 + \text{м}^2} = \sqrt{\text{м}^2 + \text{м}^2} = \text{м}$$

Для того чтобы найти перемещение недостаточно узнать его величину, необходимо также определить и направление вектора перемещения, для этого найдем угол между перемещением$\Delta\vec{r}$ и линией берега:

$$\sin\alpha = \frac{l}{\Delta r} = 7.7 \cdot 10^{-3}$$

Поскольку угол α очень мал, то $\sin\alpha \approx \alpha$, причем угол измеряется в радианной мере. Тогда

$$\alpha = 7.7 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 0.4^\circ$$

Ответ: *Величина перемещения равна 420 м, угол между перемещением и направлением движения парома составил* 0.4°.