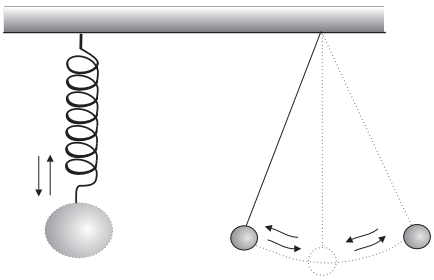
15 Колебания

15.1 Основные характеристики колебаний.

Колебания - это процессы, точно или приблизительно повторяющиеся через одинаковые промежутки времени.

Характерные особенности колебаний:



- периодичность
- наличие положения равновесия

Механические колебания - это периодические движения при которых тело смещается около положения устойчивого равновесия.

Давайте сразу определим, что такое электрические и электромагнитные колебания.

Электрические колебания это повторяющиеся изменения сил токов в электрических цепях и , соответственно, электрических и магнитных полей в пространстве вокруг этих цепей.

Physics.spb.ru

Несмотря на различную природу колебаний, в них обнаруживаются одни и те же закономерности, которые описываются одними и теми же уравнениями.

Классификация колебаний

- свободные и вынужденные

  Свободными называются колебания, которые происходят под действием только внутренних сил системы.

  Вынужденными называются колебания, которые происходят по действием внешней, периодически меняющейся силы.

- затухающие и незатухающие

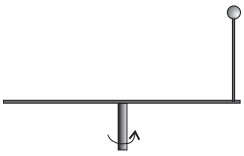
  Колебания называются затухающими, если полная энергия колебательной системы убывает с течением времени, и незатухающими, если остается неизменной.

  Стоит отметить, что свободные колебания обычно бывают затухающими, из-за диссипативных сил, присутствующих колебательной системе.

- гармонические и негармонические

  Колебания называются гармоническими, если они описываются гармонической функцией, т.е. синусом или косинусом.

15.1.1 Гармонические колебания



Что мы хотим получить изучая любое движение? Основная задача механики состоит в определении уравнения $x(t)$.

Демонстрация: диск с шариком, проектор

Что показывает этот опыт? Пусть тело движется равномерно по окружности с постоянной угловой скоростью ω. Рассмотрим чему будет равна проекция на ось x . По определению эта величина и определяет видимое нами колебание.

$$\omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t$$

$$\boxed{x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

При вращении точки по окружности ее проекция на диаметр совершает колебательное движение с таким же периодом. При этом центр окружности является положением равновесия, а радиус - максимальным смещением.

Т.о. каждому колебанию с таким уравнением можно подобрать соответствующее движение по окружности.

Если координата колеблющейся точки изменяется с течением времени по синусоидальному закону, то такие колебания называются гармоническими.

Материальная точка совершающая гармонические колебания, называется гармоническим осциллятором.

Physics.spb.ru

15.1.2 Характеристики колебательного движения

Характеристики процесса в целом

$$T: \qquad [T] = c$$

$$t, N \quad \Rightarrow \quad T = \frac{t}{N}$$

$$\nu: \qquad \nu = \frac{N}{t} = \frac{1}{T} \quad [\nu] = c^{-1} = \text{Гц}$$

$$\omega: \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad [\omega] = \frac{\text{рад}}{c} = c^{-1}$$

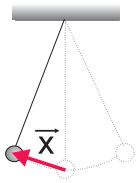
Наибольшее значение колеблющейся величины

$$x_m, a_m, v_m$$

Мгновенные характериситики

$\vec{x}(t)$ - смещение, это вектор, соединяющий положение равновесия с данной точкой.

Текущие значения скорости, ускорения, силы



$\varphi(t)$ - фаза, величина под знаком синуса. Фаза это величина, которая определяет состояние системы в данный момент времени и совместно с амплитудой определяет положение колеблющейся точки и направление движения.

Фазу будем измерять углом поворота радиус-вектора вращения точки, у которой длина радиус-вектора равна амплитуде колебаний, а период вращения равен периоду колебаний.

$$[\varphi] = \text{рад}$$

Таким образом

$$\boxed{\begin{aligned} &x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi_0) \\ &x(t) = x_m \cos(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0) \\ &x(t) = x_m \cos(2\pi\nu t + \varphi_0) \end{aligned}} \tag{1}$$

15.1.3 Кинематика колебаний

Как найти скорость в какой-то момент времени?

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = x'(t) = \dot{x} = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = v'(t) = \dot{v} = -\omega^2 \underbrace{x_m \cos(\omega t + \varphi_0)}_{x(t)}$$

Из курса математики 11 класса станет известно, что функция вида $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ является решением следующего дифференциального уравнения:

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \tag{2}$$

Колебания в которых ускорение прямо пропорционально смещению с обратным знаком, называются гармоническими

$$F = ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = -m\omega^2 x} \tag{3}$$

Колебания, которые совершаются под действием силы пропорциональной смещению и направленной к положению равновесия, называются гармоническими

Примером такой силы является сила упругости.

15.1.4 Сдвиг фаз

Принято говорить, что между кинематическими характеристиками существует сдвиг фаз. Приведем все к косинусоидальной зависимости:

$$\begin{aligned} &x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0) \\ &v = \dot{x} = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi_0 + \tfrac{\pi}{2}) = v_m \cos(\omega t + \varphi_0 + \tfrac{\pi}{2}) \\ &a = \dot{v} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi_0 \pm \pi) = a_m \cos(\omega t + \varphi_0 \pm \pi) \end{aligned}$$

$$\boxed{v_m = \omega x_m} \qquad \boxed{a_m = \omega^2 x_m}$$

Скорость опережает по фазе на $\frac{\pi}{2}$ смещение, а ускорение опережает смещение на π

Колебания можно описать:

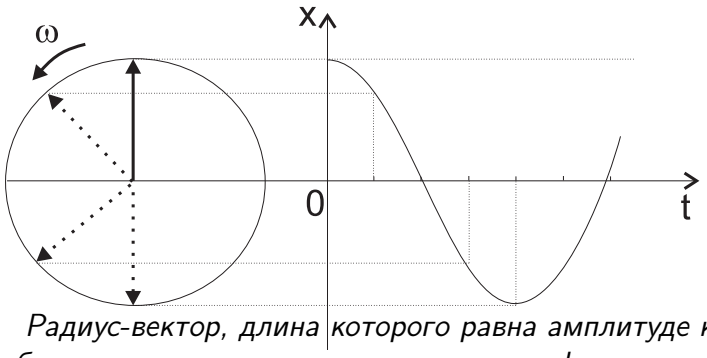
- Аналитически

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

- Экспериментально

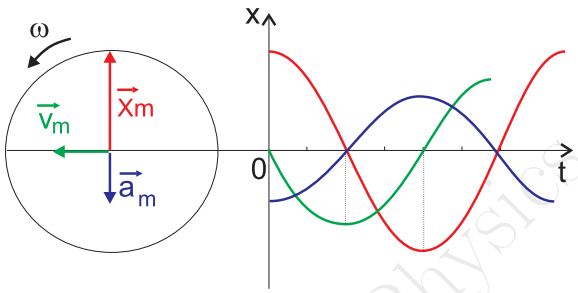
  Записав таблицу значений смещений от времени

- Графически



t	$\varphi = \frac{2\pi}{T}t$	x
0	0	x_m
$T/8$	$\pi/4$	$2x_m/\sqrt{2}$
$T/4$	$\pi/2$	0
$3T/8$	$3\pi/4$	$-2x_m/\sqrt{2}$
$T/2$	π	$-x_m$

Радиус-вектор, длина которого равна амплитуде колебания и который проведен под углом φ_0 к выбранному диаметру, тоже является графическим изображением. Такой чертеж называется векторной диаграммой.



$$x = x_m \cos \omega t$$
$$v = v_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$
$$a = a_m \cos(\omega t \pm \pi)$$

Physics.spb.ru

Пример задачи:

Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой 1 см и частотой 2 Гц. Через сколько времени смещение точки от положения равновесия будет 0,71 см, если в начале наблюдения она проходила положение равновесия.

t **Дано:**
$x_m = 1$ см
$\nu = 2$ Гц
$x = 0,71$ см
$x_0 = 0$ см

Решение:

$$x_0 = x_m \cos \varphi_0$$

$$0 = 0,01 \cos \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x(t) = 0,01 \cos(2\pi\nu t + \frac{\pi}{2})$$

$$\cos(4\pi t + \frac{\pi}{2}) = 0,71$$

$$4\pi t + \frac{\pi}{2} = +\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \qquad k \in Z$$

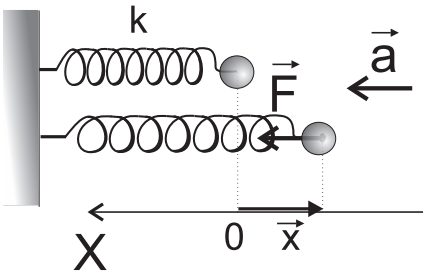
$$t_1 = -\frac{3}{16} + k$$
$$t_2 = -\frac{1}{16} + k/2$$

Первое решение не подходит

15.2 Колебания пружинного маятника.

15.2.1 Горизонтальный маятник

Рассмотрим колебания груза на пружине в горизонтальном направлении, т.е. будем считать, что силы тяжести нет, либо она скомпенсирована силой реакции.



$$\vec{F}_{\text{упр}} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$

$$\text{"}x\text{"}: \quad F_y = ma \quad \Rightarrow \quad -kx = ma$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

Таким образом колебания груза на пружине являются гармоническими колебаниями. Следовательно

$$a = -\omega^2 x \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\ \nu &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}} \tag{4}$$

Период колебаний не зависит от амплитуды, способа возбуждения, а определяется только параметрами системы.

Проверка размерности:

$$\left[\sqrt{\frac{m}{k}}\right] = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot c^2 \cdot \text{м}}{\text{м} \cdot \text{кг}}} = c$$

Аналогичный вывод можно получить из закона сохранения энергии в случае отсутствия диссипативных сил.

В произвольной точке, полная энергия

$$\frac{kx^2(t)}{2} + \frac{mv^2(t)}{2} = const$$

продифференцируем это равенство

Physics.spb.ru

$$\frac{k}{2}2x(t)x'(t) + \frac{m}{2}2v(t)v'(t) = 0$$

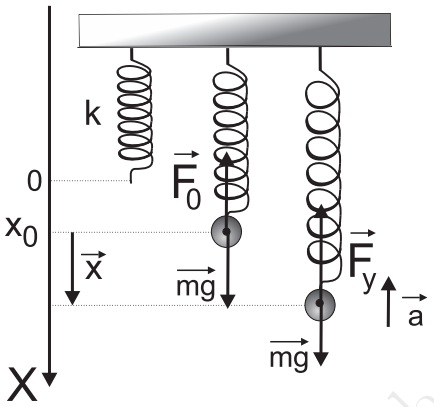
$$kx(t)x'(t) + mx'(t)x''(t) = 0$$

возможно два решения
$x'(t) = 0$ - не подходит, т.к. скорость не остается постоянной

$$x''(t) = -\frac{k}{m}x(t) \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

15.2.2 Вертикальный маятник

Рассмотрим случай вертикального маятника



В равновесном положении

$$\vec{F}_0 + m\vec{g} = \vec{0}$$

Спроецировав получим

$$"x" : mg - F_0 = 0$$

$$mg = kx_0$$

В процессе колебаний можно записать следующие уравнения

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$"x" : -k|x + x_0| + mg = -ma$$

Подставив выражение для kx_0, получим

$$a = \frac{k}{m}|x|$$

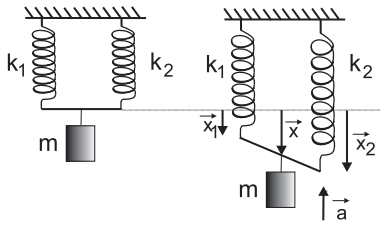
$$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{x} \quad \Rightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m}x$$

Сравнивая полученное выражение с выражением для горизонтального маятника, можно сделать вывод, что колебания по своему характеру будут одинаковыми при любом положении маятника.

15.2.3 Пример задачи

1. Найти период колебаний следующих систем, если известна масса груза, коэффициенты жесткости каждой пружины и груз висит по середине стрежня.

Physics.spb.ru



Найдем эквивалентный коэффициент жесткости

$$k_{eq}x = mg$$

т.к. груз висит по середине, то

$$\frac{1}{2}mg = k_1x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{mg}{2k_1}$$

$$\frac{1}{2}mg = k_2x_1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{mg}{2k_2}$$

При этом смещение точки крепления груза будет равно

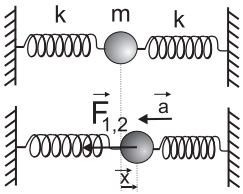
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Тогда

$$k_{eq}\frac{x_1 + x_2}{2} = mg \quad \Rightarrow \quad k_{eq} = \frac{2mg}{x_1 + x_2} = \frac{2mg}{\frac{mg}{2k_2} + \frac{mg}{2k_1}} = \frac{4k_1k_2}{k_1 + k_2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}}$$

2. Найти период колебаний следующей системы



$$F_1 + F_2 = ma \quad \Rightarrow \quad -kx - kx = ma$$

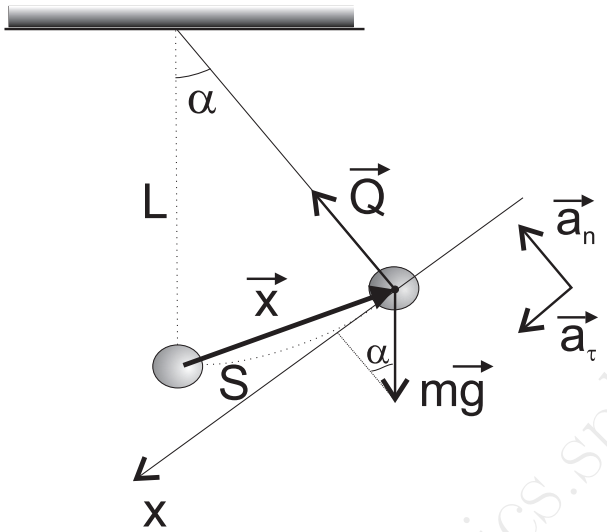
$$-2kx = ma \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{2k}{m}x \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

Physics.spb.ru

15.3 Колебания математического маятника

Математический маятник - это тело, подвешенное на невесомой нити, длина которой много больше размеров тела

$$l_{\text{нити}} >> D_{\text{груза}}$$
$$m_{\text{груза}} >> m_{\text{нити}}$$



Для удобства будем считать, что сопротивление среды отсутствует и точка подвеса неподвижна, т.е. будем рассматривать колебания в инерциальной системе отсчета. Для того чтобы начались колебания будет достаточно однократного воздействия, поэтому колебания математического маятника являются свободными.

Запишем второй закон Ньютона для груза

$$\vec{Q} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Что можно сказать об ускорении тела? Поскольку при колебании тела скорость меняется (в крайних точках скорость равна нулю), это означает что груз движется по окружности неравномерно. Тогда во втором законе Ньютона стоит полное ускорение равное

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

Выберем ось "x", так чтобы она была перпендикулярна нити в данный момент времени.
Спроецируем второй закон Ньютона

$$"x" : mg\sin\alpha = ma_\tau$$
$$"y" : Q - mg\cos\alpha = ma_n$$

Из проекции на ось "x" получаем

$$a_\tau = g\sin\alpha$$

Рассмотрим колебания с малой амплитудой, т.е. при углах $\alpha \sim 0$
Известно, что при малых углах синус угла приблизительно равен углу и

$$S \to |x|$$

Отсюда получаем

$$\sin\alpha \sim \alpha = \frac{S}{l} = -\frac{x}{l}$$

Проекция смещения на ось "x" будет отрицательной, если бы ось "x" выбрали в противоположенную сторону, то знак минус появился бы у проекции ускорения
Таким образом

Physics.spb.ru

$$\boxed{a_\tau = -\frac{g}{l}x}$$

Тангенциальное ускорение математического маятника прямо пропорционально смещению с обратным знаком.

Следовательно колебания математического маятника являются гармоническими, тогда

$$a_\tau = -\omega^2 x$$

получаем формулу для периода колебаний

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Период колебаний математического маятника не зависит от амплитуды колебаний, массы тела, а определяется только длиной нити и ускорением свободного падения.

Последнюю формулу принято называть формулой Гюйгенса.

Христиан Гюйгенс (1629-1695) - голландский физик, механик, математик и астроном. 1657 году Гюйгенс сообщает о созданных им маятниковых часах. В том же году он получил патент на эти часы, а в 1658 опубликовал свое открытие в сочинении “Horologium” (“Часы”). Опубликование “Часов” вскоре создало Гюйгенсу такую славу, что в 1663 году его избирают членом Лондонского Королевского общества, а в 1666 году приглашают в Париж, где избирают членом только что созданной Парижской Академии наук.

Проверим размерность полученной формулы

$$[T] = \sqrt{\frac{\text{м}c^2}{\text{м}}} = c$$

С физической точки зрения полученный результат означает

- чем больше длина нити, тем больше длина дуги, по которой движется маятник, следовательно он движется дольше
- чем больше ускорение свободного падения, тем больше скорость, тем быстрее маятник проходит дугу.

Стоит отметить, что полученная формула верна для малых углов, так при углах не более 5° формула Гюйгенса дает погрешность до $0,05\%$

Остановимся на некоторых особенностях математического маятника:

- зависимость периода колебаний от температуры, с ростом температуры длина увеличивается, следовательно увеличивается период

$$l = l_0(1 + \alpha t^\circ) \quad \Rightarrow \quad T = T(t^\circ)$$

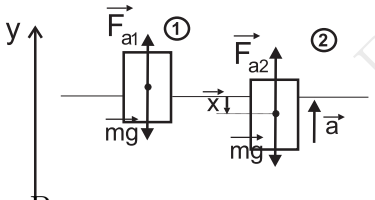
- зависимость периода колебаний от широты места наблюдения и от высоты над поверхностью Земли: по мере переноса маятника с полюса на экватор период увеличивается. На экваторе ускорение свободного падения меньше.
- Л.Фуко обнаружил и великолепно использовал проявление инертности маятника: способность сохранять плоскость колебаний неизменной. Используя это свойство он доказал вращение Земли (1831 год - маятник Фуко в парижском пантеоне, а также до недавнего времени в Исаакиевском соборе с длиной троса 98 м)
- Галилей первым заметил, что период колебаний маятника (при малых смещениях), не зависит от массы тела и амплитуды колебаний. Используя этот факт позднее Галилей пришел к выводу, что все тела в данном месте Земли должны падать одинаково.

15.4 Исследование колебательных систем

15.4.1 Колебания поплавка

Поплавок цилиндрической формы на поверхности воды. Известна плотность жидкости ρ, масса поплавка m, площадь основания поплавка S

Physics.spb.ru



В первом положении:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{a1} = \vec{0}$$

$$"y" : -mg + F_{a1} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{a1} = mg$$

Во втором положении:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{a2} = m\vec{a}$$

$$-mg + F_{a2} = ma$$

$$F_{a2} = F_{a1} + F_{\text{доб}} \quad \Rightarrow \quad -mg + F_{a1} + F_{\text{доб}} = ma \qquad \Leftrightarrow$$

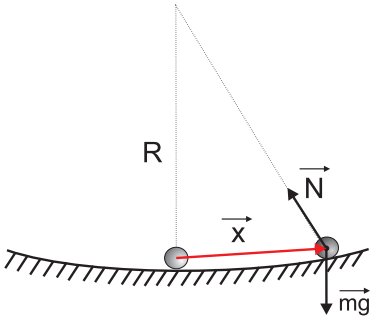
$$-F_{a1} + F_{a1} + F_{\text{доб}} = ma \quad \Rightarrow \quad \rho g \Delta V = ma \Leftrightarrow \rho g x S = ma$$

$$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{x} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{\rho g S}{m} x$$

Таким образом колебания поплавка будут гармоническими, следовательно

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}}; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}}}$$

15.4.2 Шарик в сферической яме



Период колебаний такой системы выводится аналогично периоду колебаний математического маятника. Только вместо длины нити надо подставить радиус ямы, а вместо силы реакции нити - силу реакции ямы.

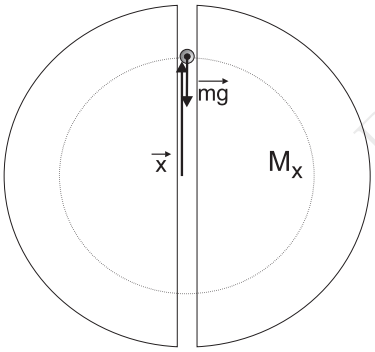
Тогда получится

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}}$$

15.4.3 Тело в сквозной шахте Земли

Physics.spb.ru

Рассмотрим тело падающее в сквозную шахту, проходящую через центр Земли. Рассмотрим тело на расстоянии x от центра Земли.



$$F_x = \gamma\frac{mM_x}{x^2} = \gamma\frac{m\rho 4\pi|x|^3}{3x^2}$$

$$M_x = \rho\frac{4}{3}\pi|x|^3$$

$$ma = F_x = \gamma\frac{m\rho 4\pi}{3}|x|$$

Но, поскольку ускорение противоположно направлено смещению

$$ma = -\gamma\frac{m\rho 4\pi}{3}x \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \gamma\frac{4\pi m\rho}{3m}$$

На поверхности Земли

$$F_0 = mg_0 = \gamma\frac{Mm}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \gamma\frac{Mm}{R^2} \Leftrightarrow M = \frac{g_0R^2}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{M}{V_0} = \frac{g_0R^2}{\gamma\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3g_0}{4\pi\gamma R}$$

$$\omega^2 = \frac{\gamma 4\pi 3g_0}{3\cdot 4\pi\gamma R} = \frac{g_0}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g_0}{R}}; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}}$$

Таким образом рассмотрев все случаи, можно прийти к выводу, что причиной того, что колебательные системы совершают гармонические колебания, являются силы для которых справедливо, следующее утверждение: $F \sim -x$. Такие силы принято называть квазиупругими.

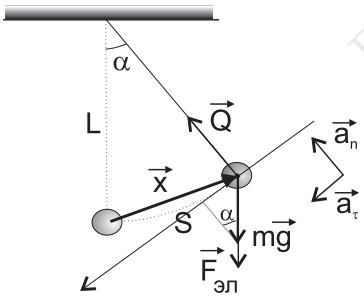
Пружинный маятник	**Математический маятник**	**Колебания поплавка**	**Тело в сферической яме**	**Падение в шахту**
Сила упругости $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	Составл. силы тяжести $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	Архимедова сила $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}}$	Составл. силы тяжести $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$	Сила тяжести $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}$

Гармонические колебания вызываются квазиупругими силами. Период свободных колебаний не зависит от внешних факторов(например амплитуды), а полностью определяется параметрами системы.

15.5 Примеры задач на механические колебания

15.5.1 Маятник в электрическом поле

Дан заряд -q и массой m, подвешенный на нити длиной l. Пол зарядом расположена горизонтальная пластина с поверхностной плотностью заряда σ. Найти период колебаний данного маятника.



$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}$$

$$(mg + F)\sin\alpha = ma_\tau$$

$$\sin\alpha \to 0, \alpha \to 0$$

$$\alpha = \frac{S}{l} \qquad S \sim |x|$$

$$(mg + qE)\alpha = ma_\tau$$

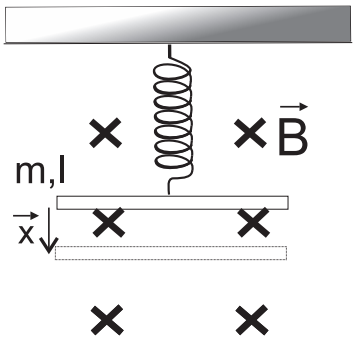
$$-(mg + qE)\frac{x}{l} ma_\tau \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g + \frac{q\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0 m}}{l}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{q + \frac{q\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0 m}}}}$$

Physics.spb.ru

15.5.2 Стержень в магнитном поле

Дан стержень массой 100 г и длиной 1 м, подвешенный на пружине жесткостью 10 Н/м. Вся система находится в магнитном поле индуктивностью 0,01 Тл, при этом пружина растянулась на 10 см. Определить максимальную э.д.с. наведенную на стержне?



$$\varepsilon(t) = Bv(t)l \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{max} = Bv_{max}l$$

$$x(t) = x_m \cos\omega t, \quad \varphi_0 = 0$$

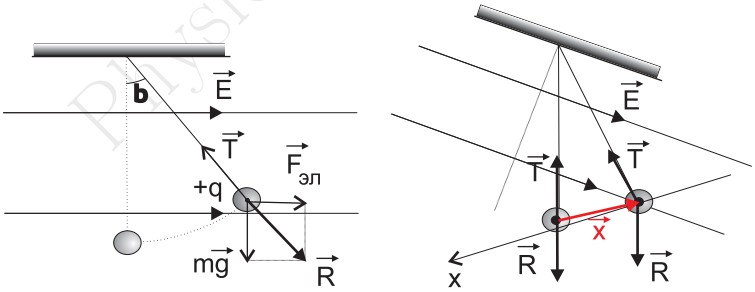
$$v(t) = x'(t) = -\omega x_m \sin\omega t$$

$$\Rightarrow \quad v_{max} = \omega x_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}} x_{max}$$

$$\varepsilon_{max} = Blx_{max}\sqrt{\frac{k}{m}} = 0,01B$$

15.5.3 Математический маятник в горизонтальном электрическом поле

В горизонтальном поле происходит смещение положения равновесия.



$$\vec{R} = m\vec{g} + \vec{F}_e$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{F_e}{mg} = \frac{qE}{mg}$$

Перейдем к картинке в положении равновесия

$$\vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$$

$$"x": \quad R\sin\alpha = ma$$

$$\alpha \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha \sim \alpha$$

Physics.spb.ru

$$\alpha = \frac{S}{l} = \frac{|x|}{l} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{R}{ml}x \quad \Rightarrow$$

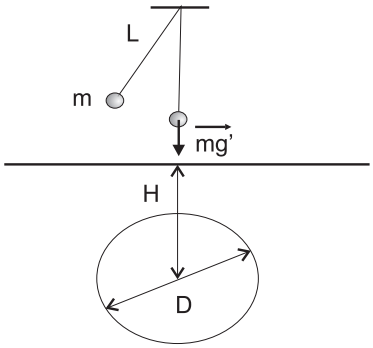
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{R}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{\sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{(g)^2 + (qE/m)^2}}}$$

Если на маятник кроме силы тяжести действует еще постоянная сила, то колебания остаются гармоническими, т.к. период остается $\sim \sqrt{l}$ и обратно пропорционален квадратному корню из суммарного ускорения, сообщаемого маятнику всеми постоянными силами.

15.5.4 Метод дополнения. Маятник над туннелем.

Найти период колебаний математического маятника расположенного над туннелем метро диаметра D, находящегося на глубине H от поверхности земли.

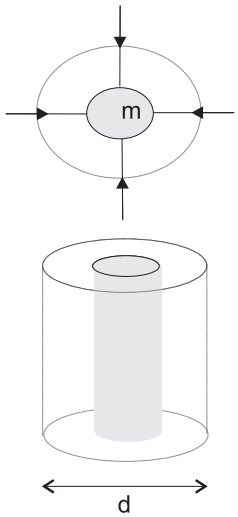
Наличие туннеля под землей вносит искажение в гравитационное поле Земли. Следовательно над туннелем ускорение свободного падения отличается от того, которое бы было в случае однородной Земли.



$$g' = g - g_{\text{т}}$$

Для того чтобы найти добавку $g_{\text{т}}$ рассчитаем напряженность гравитационного поля отдельного цилиндра, такого же диаметра, как и туннель.

Сформулируем теорему Гаусса для гравитационного поля: Поток вектора напряженности гравитационного поля через замкнутую поверхность прямо пропорционален массе, ограниченной данной поверхностью.



$$\Phi = E_G S = \gamma\frac{m}{r^2}4\pi r^2 = 4\pi\gamma m$$

$$\Phi = E_G S = E_G \pi d l$$

$$\Rightarrow \quad E_G = 4\gamma\frac{m}{dl}, \qquad m = \rho l\frac{\pi D^2}{4} \quad \Rightarrow$$

$$E_G = \gamma\rho\frac{\pi D^2}{d}$$

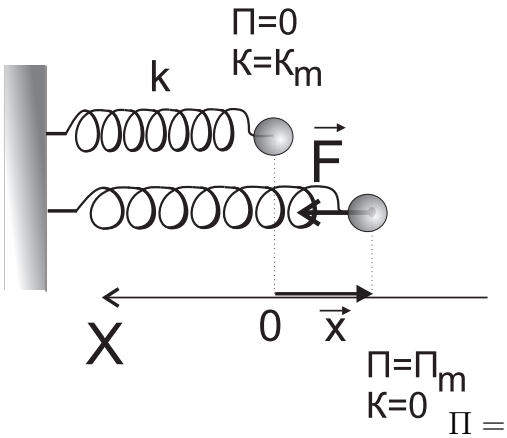
$$F = mE_G = \frac{m\gamma\rho\pi D^2}{H} \quad \Rightarrow \quad g_{\text{т}} = \gamma\frac{\rho\pi D^2}{H}$$

$$g' = g - \gamma\frac{\rho\pi D^2}{H} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - \gamma\frac{\rho\pi D^2}{H}}}}$$

Physics.spb.ru

15.6 Энергия колебаний.

15.6.1 Свободные гармонические незатухающие колебания



Поскольку колебания свободные, то полная энергия будет сохраняться:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const$$

$$E = \frac{mv_m^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2}$$

Вспомним выражение для скорости и координаты получим:

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

Последняя формула справедлива всегда, когда колебание происходит под действием квазиупругих сил.

$$v = x'(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \Rightarrow$$

$$K = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E = K + \Pi = \frac{kx_m^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{kx_m^2}{2} = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}$$

Полная энергия колебательной системы прямо пропорциональна квадрату амплитуды и квадрату циклической частоты.

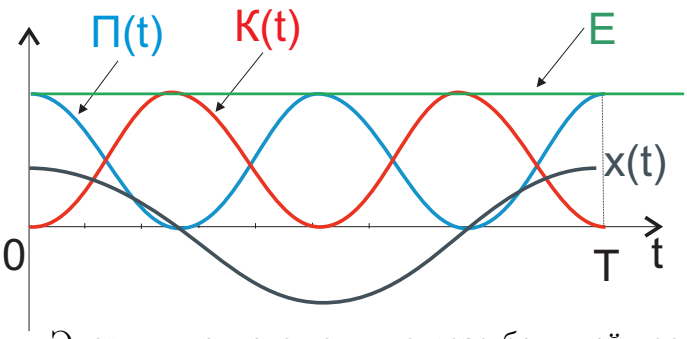
Закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const \quad \Rightarrow$$

$$\frac{2mvv'}{2} + \frac{2xkx'}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad ma + kx = 0$$

$$\boxed{x'' = -\frac{k}{m}x}$$

Следовательно колебания гармонические, что соответствует исходным данным.
Графическое описание:
Построим графики зависимости K(t), П(t), x(t). Пусть начальная фаза $\varphi_0 = 0$.



$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) \qquad \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\begin{cases} K(t) = \frac{m\omega^2 x_m^2}{4}(1-\cos 2\omega t) \\ \Pi(t) = \frac{kx_m^2}{4}(1+\cos 2\omega t) \end{cases}$$

Энергия меняется с в два раза большей частотой, т.к. за период маятник проходит каждое положение дважды.

15.6.2 Затухающие колебания

Рассмотрим теперь случай затухающих колебании в вязкой среде с силой сопротивления, прямо пропорциональной скорости $\vec{F}_c = -n\vec{v}$

$$mx'' = -kx - nx'$$

Решим данное дифференциальное уравнение:

$$x'' + \frac{k}{m}x + \frac{n}{m}x' = 0$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ 2\beta = \frac{n}{m} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x'' + \omega_0^2 x + 2\beta x' = 0$$

Решением данного дифференциального уравнения является экспоненциальная функция $x(t) = e^{\lambda t}$, тогда

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} + 2\beta\lambda e^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$$

Если $\beta > \omega_0$, тогда $\lambda_{1,2} \in \Re$ и колебаний не будет, получится либо экспоненциальное возрастание, либо экспоненциальное убывание. Поэтому такой вариант не описывает затухающие колебания. Рассмотрим тогда случай $\beta < \omega_0$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\omega$$

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{(-\beta+i\omega)t} = e^{-\beta t}\cdot e^{i\omega t} \\ x_1(t) = e^{(-\beta-i\omega)t} = e^{-\beta t}\cdot e^{-i\omega t} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

Это и есть решение исходного дифференциального уравнения. Константы C_1, C_2 зависят от начальных условий.

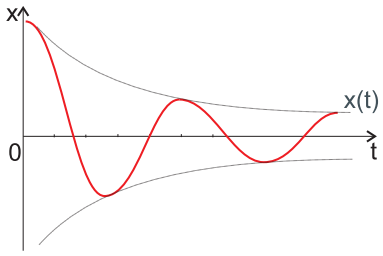
$$\begin{matrix} e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t \\ e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \cos\omega t = \frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2} \\ \sin\omega t = \frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i} \end{matrix}$$

physics.spb.ru

$$x_1(t) = e^{-\beta t}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$

$$x_2(t) = e^{-\beta t}(\cos\omega t - i\sin\omega t)$$

$$x = C_1' e^{-\beta t}\cos\omega t + C_2' e^{-\beta t}\sin\omega t = \sqrt{C_1'^2 + C_2'^2}e^{-\beta t}\left(\frac{C_1'}{\sqrt{C_1'^2 + C_2'^2}}\cos\omega t + \frac{C_2'}{\sqrt{C_1'^2 + C_2'^2}}\sin\omega t\right) \quad \Rightarrow$$

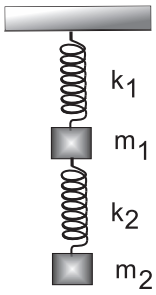


$$\boxed{x(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

Из полученного уравнения и графика видно, что амплитуда колебаний уменьшается с течением времени, а период при затуханиях не меняется.

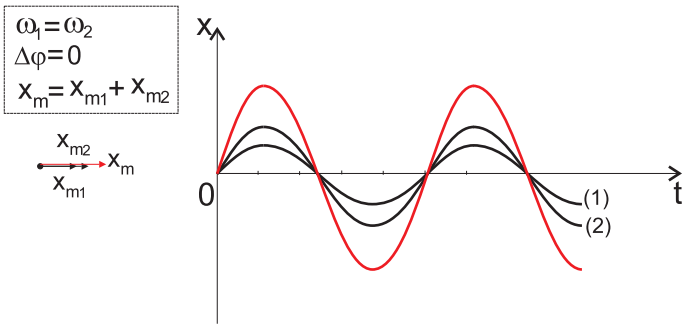
15.7 Сложение колебаний. Вынужденные колебания. Резонанс.

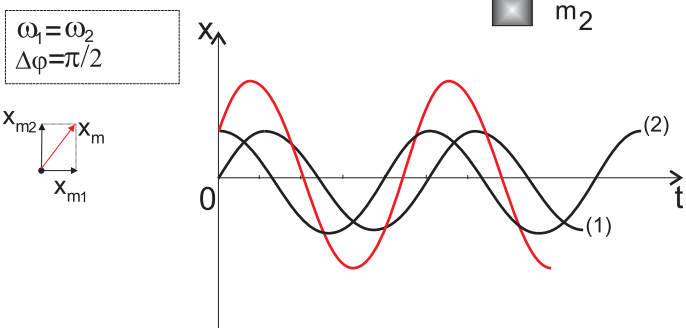
Рассмотрим систему из двух тел, участвующих в колебательном движении. Тогда колебания нижнего груза будут описываться следующим уравнением

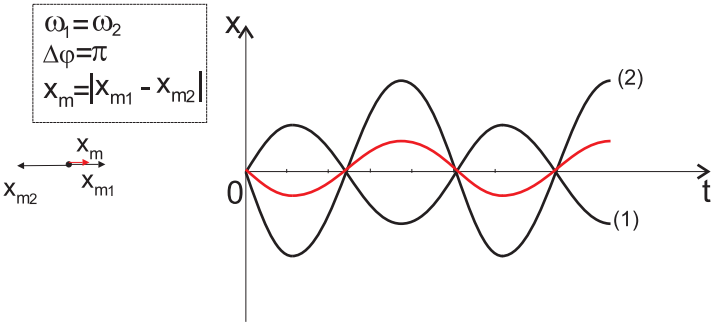


$$x(t) = x_{m1}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + x_{m2}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Интересно рассмотреть такие случаи







Physics.spb.ru

При сложении гармонических колебаний одинаковой частоты, результирующее тоже гармоническое колебание той же частоты, причем

$$\boxed{|x_{m1} - x_{m2}| \leqslant x_m \leqslant x_{m1} + x_{m2}}$$

Амплитуда будет зависеть от сдвига фаз между колебаниями.

Рассмотрим общий случай сложения колебаний с одинаковыми частотами:

$$x = x_{m1}\cos(\omega t + \varphi_1) + x_{m2}\cos(\omega t + \varphi_2) =$$

$$= x_{m1}\cos\omega t\cos\varphi_1 - x_{m1}\sin\omega t\sin\varphi_1 + x_{m2}\cos\omega t\cos\varphi_2 - x_{m2}\sin\omega t\sin\varphi_2 =$$

$$= (x_{m1}\cos\varphi_1 + x_{m2}\cos\varphi_2)\cos\omega t - (x_{m1}\sin\varphi_1 + x_{m2}\sin\varphi_2)\sin\omega t = c_1\cos\omega t - c_2\sin\omega t =$$

$$= \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}\cos\omega t - \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}\sin\omega t\right) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\cos(\omega t + \alpha)$$

- где $\cos\alpha = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$, $\quad \sin\alpha = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$

Physics.spb.ru

15.7.1 Сложение колебаний с разными частотами.

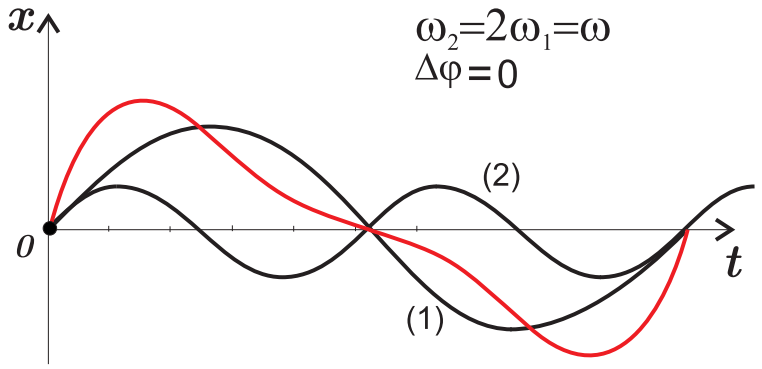
Рассмотрим случай сложения колебаний с кратно отличающимися частотами. Пусть

$$\omega_2 = 2\omega_1 = 2\omega \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = 0$$

Тогда

$$x(t) = x_{m1}\cos\omega t + x_{m2}\cos 2\omega t$$

Аналитически получить выражение достаточно трудоемко, поэтому можно графики сложить по точкам. В итоге получится график, который точно не будет описываться гармонической функцией. Т.е. результирующие колебания не будут гармоническими и будут происходить с наименьшей из двух частот.



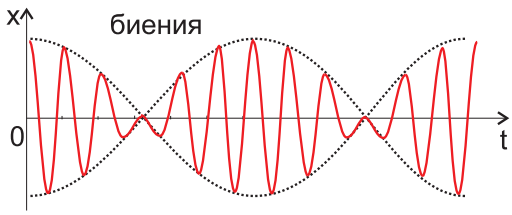
15.7.2 Сложение колебаний с близкими частотами.

$$\sqsupset\ \omega_1, \omega_2: \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_1(\omega_2)} << 1 \qquad x_m = x_{m1} = x_{m2}$$

$$x = x_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + x_m \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = 2x_m \cos\frac{\omega_1 t + \varphi_1 + \omega_2 t + \varphi_2}{2} \cos\frac{\omega_1 t + \varphi_1 - \omega_2 t - \varphi_2}{2} =$$

$$= 2x_m \cos\left(\underbrace{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}_{\omega} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$$

$$\sqsupset\ \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x \approx \underbrace{2x_m \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right)}_{A(t)} \cos\omega t$$



$$\boxed{x = A(t)\cos\omega t}$$

Если $\Delta\omega \ll \omega$, тогда $A(t)$ - гармонически изменяющая амплитуда, частота которой значительно меньше частоты колебаний.

Замечание: В XIX веке французский математик Жак Фурье доказал, что любая периодическая функция может быть представлена в виде

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cos(i\omega t + \varphi_i) = c_0 + c_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + c_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \ldots$$

Частоты $\omega, 2\omega, 3\omega \ldots$- называются спектром колебаний. Если частоты заполняют всю числовую ось, то спект называется сплошным и сумма переходит в интеграл.

15.7.3 Вынужденные колебания. Резонанс.

Колебания происходящие под действием внешней периодической силы называются вынужденными.

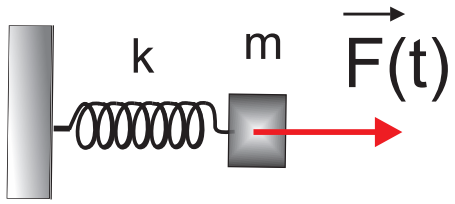
Одной из характеристик колебательной системы является собственная частота колебаний.

Частота свободных колебаний системы называется собственной

В случае пружинного маятника собственная частота может быть выражена через коэффициент жесткости пружины и массу груза

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Пусть на любую систему, в которой возможны гармонические колебания с собственной частотой ω_0 действует внешняя сила $F = F_0 \cos\omega t$, которая меняется со временем с другой частотой ω.



$$\vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F} = m\vec{a}$$

$$-kx + F_0 \cos\omega t = mx''$$

$$\sqsupset\ x = x_m \cos\omega t \quad \Rightarrow \quad -kx_m \cos\omega t + F_0 \cos\omega t = -m\omega^2 x_m \cos\omega t$$

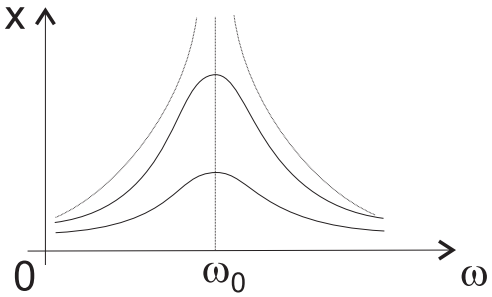
$$x_m = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0}{m(\frac{k}{m} - \omega^2)} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

В отсутствии трения при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте системы происходит резкое, увеличение амплитуды колебаний. При отсутствии диссипативных сил амплитуда возрастет настолько, что может произойти разрушение колебательной системы.

Но, при наличии трения уравнение динамики будет иметь вид

$$-kx - nx' + F_0 \cos\omega t = mx''$$

Решение этого уравнения имеет максимум при совпадении частот, но не уходит на бесконечность. При увеличении амплитуды увеличиваются потери энергии, т.к. работа диссипативной силы пропорциональна скорости, которая увеличивается с увеличением амплитуды ($v_m = \omega x_m$). Когда потери энергии за период сравняются с ее поступлением в систему, устанавливается определенная конечная амплитуда. Т.е. в этом случае работа внешней силы идет на преодоление диссипативных сил.



Резкое увеличение амплитуды колебаний при совпадении собственной частоты колебаний системы с частотой внешней силы называется резонансом.

Пример опыта по механическому резонансу (Видеоэксперимент).

15.7.4 Решение уравнения динамики для резонанса методом векторных диаграмм

$$-kx(t) - nx'(t) + F_m \cos\omega t = mx''(t)$$

$$mx''(t) + kx(t) + nx'(t) = F_m \cos\omega t$$

Опытно установлено (сейчас докажем), что происходят гармонические колебания. Тогда решение будет иметь вид

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \alpha)$$

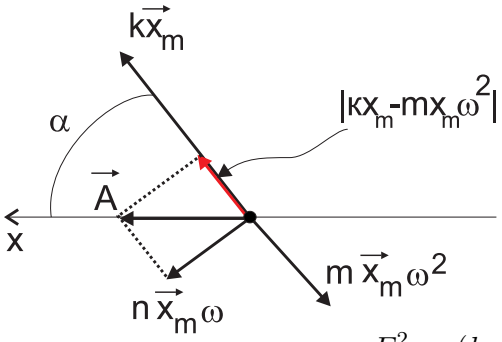
Тогда вспомним

$$v(t) = x'(t) = -x_m\omega\sin(\omega t+\alpha) = x_m\omega\cos(\omega t+\alpha+\tfrac{\pi}{2})$$
$$a(t) = x''(t) = -x_m\omega^2\cos(\omega t+\alpha) = x_m\omega^2\cos(\omega t+\alpha+\pi)$$

При подстановке исходное уравнение приобретает вид

$$mx_m\omega^2\cos(\omega t+\alpha+\pi) + nx_m\omega\cos(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2}) + kx_m\cos(\omega t+\alpha) = F_m\cos\omega t$$

Построим векторную диаграмму, определив x_m, α



В направлении вектора A происходят колебания, описываемые левой частью исходного уравнения(сумма колебаний). Эти колебания должны совпадать с правой частью. Тогда величина вектора $\vec{A}$ должна совпадать с амплитудой внешней силы

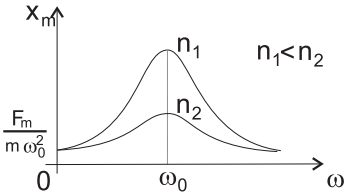
$$A = F_m$$

следовательно

$$F_m^2 = (kx_m - m\omega^2x_m)^2 + (nx_m\omega)^2 \quad \Rightarrow$$

$$x_m = \frac{F_m}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+n^2\omega^2}} = \frac{F_m}{m\sqrt{(\frac{k}{m}-\omega^2)^2+\frac{n^2}{m^2}\omega^2}} =$$

$$= \frac{F_m}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{n^2}{m^2}\omega^2}}$$



Функция $x_m(\omega)$ достигает максимума при $\omega_0 = \omega$, следовательно

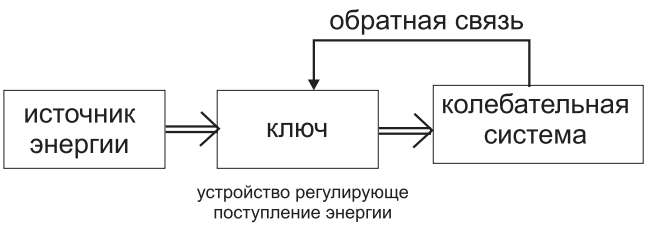
$$x_m = \frac{F_m}{n\omega_0}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{nx_m\omega}{kx_m - mx_m\omega^2} = \frac{n\omega}{m(\omega_0^2-\omega^2)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 0$$

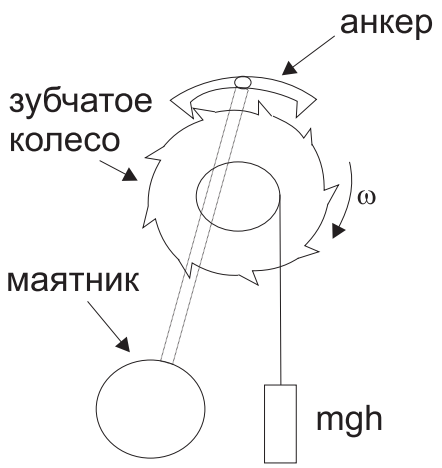
Т.е. с учетом векторной диаграммы изображенной выше, угол α будет отрицательным.

15.7.5 Автоколебания. Механические часы.

При автоколебаниях сама система командует внешней силой(обратная связь) и заставляет ее действовать на себя в определенные моменты. Автоколебания происходят с собственной частотой системы.



В автоколебательной системе всегда существует источник энергии, который поддерживает амплитуду постоянной. В отсутствии источника энергии колебания быстро бы затухли. Это произошло бы в результате действия диссипативных сил.



Рассмотрим простейшие анкерные часы.
(Видеоэксперимент).

Источником энергии в них служит потенциальная энергия грузика поднятого над землей. Колебательной системой является математический маятник. Устройство определяющим порции энергии, которые поступают в колебательную систему является анкер жестко скрепленный с маятником, который с одной стороны "зубом"с одной стороны фиксирует порцию энергии, а с другой стороны вторым "зубом"подталкивает колебательную систему.

Фиксация и толчок происходят за счет определенной формы "зубьев"на анкере и зубчатом колесе.

Physics.spb.ru

15.7.6 Поправки к ходу часов

На сколько отстанут часы за сутки, если длину маятника увеличить в **к** раз.
Пусть T_0 - старый период, T новый период, $t_0 = 24$ часа

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{kl}{g}} = \sqrt{k}T_0$$

$$N_0 = \frac{t_0}{T_0}, \qquad N = \frac{t_0}{T}$$

$$\Delta t = t_0 - t$$

Время которое показывают часы, определяется числом колебаний маятника.

$$t \sim N \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{t_0} = \frac{N}{N_0} = \frac{T_0}{T} = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \Rightarrow$$

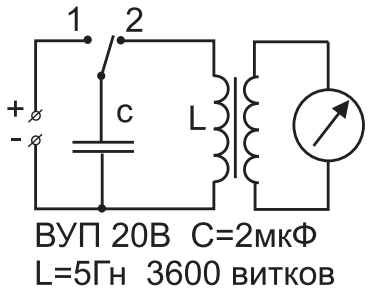
$$\Delta t = t_0 - \frac{t_0}{\sqrt{k}} = t_0\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

Physics.spb.ru

15.8 Свободные электрические колебания

Говоря о колебаниях мы определили всевозможные их виды. Вспомним определение электрических колебаний:

Def. Электромагнитные колебания - это периодические изменения заряда, тока, напряжения в цепи, при этом происходят периодические изменения энергии электрического поля конденсатора и энергии магнитного поля катушки индуктивности.



В электрических цепях могут существовать как свободные, так и вынужденные колебания.

Любая цепь обладает C и L, поэтому такой вид колебаний возможен в любой цепи, при этом емкость и индуктивность не обязательно разделены.

Рассмотрим опыт, демонстрирующий свободные колебания в таком контуре

(Видеоэксперимент).

Схема опыта изображена слева. При положении ключа 1, конденсатор запасает энергию от источника постоянной ЭДС. При положении ключа 2, конденсатор начинает разряжаться через катушку и в контуре, состоящем из конденсатора и катушки возникают электрические колебания. Чтобы на них не влиять измерением, к катушке индуктивно подключен гальванометр, который позволяет регистрировать ток во вторичной цепи, вызванный в ней в результате явления электромагнитной индукции. Опыт покажет, что в LC- контуре возникают свободные затухающие электрические колебания.

Def. Цепь в которой можно возбудить свободные электромагнитные колебания называется колебательным контуром.

Проведем аналогию электромагнитных колебаний с механическими колебаниями:

$$\begin{aligned}
x(t) &- q(t) \\
v(t) = \frac{dx(t)}{dt} &- i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \\
a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = x''(t) &- ? = \frac{di}{dt} = q''(t) \\
\Pi(t) = \frac{kx^2(t)}{2} &- \Pi(t) = \frac{q^2(t)}{2C} \\
K(t) = \frac{mv^2(t)}{2} &- W_{\text{мп}} = \frac{Li^2(t)}{2}
\end{aligned}$$

Аналогом коэффициента жесткости является $\frac{1}{c}$, а аналогом массы $m - L$ - индуктивность, следовательно период колебаний должен быть равен

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Проверим, так ли это, исходя из закона сохранения энергии:

$$W_{\text{мп}} + \Pi_c(t) = const$$

$$\frac{Li^2(t)}{2} + \frac{q^2(t)}{2C} = const$$

возьмем производную от этого уравнения

$$\frac{2Li(t)i'(t)}{2} + \frac{2q(t)q'(t)}{2C} = 0 \quad \Rightarrow \quad Li(t)q''(t) + \frac{1}{C}q(t)i(t) = 0 \quad \Rightarrow$$

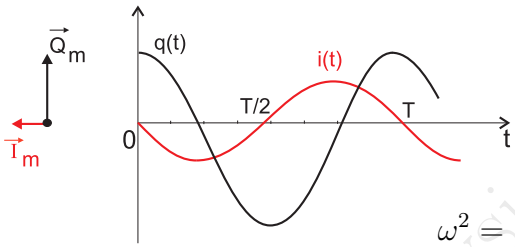
$$\boxed{q''(t) = -\frac{1}{LC}q(t)}$$

таким образом колебания будут гармоническими. Из полученной формулы видно, что формула для периода была верна.

$$q(t) = Q_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$i(t) = q'(t) = -\omega Q_m \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega Q_m \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$
$$\Rightarrow \quad I_m = \omega Q_m$$

Построим векторные диаграммы и графики:



Из уравнения гармонических колебаний

$$q''(t) = -\omega^2 \cdot q(t)$$

получаем

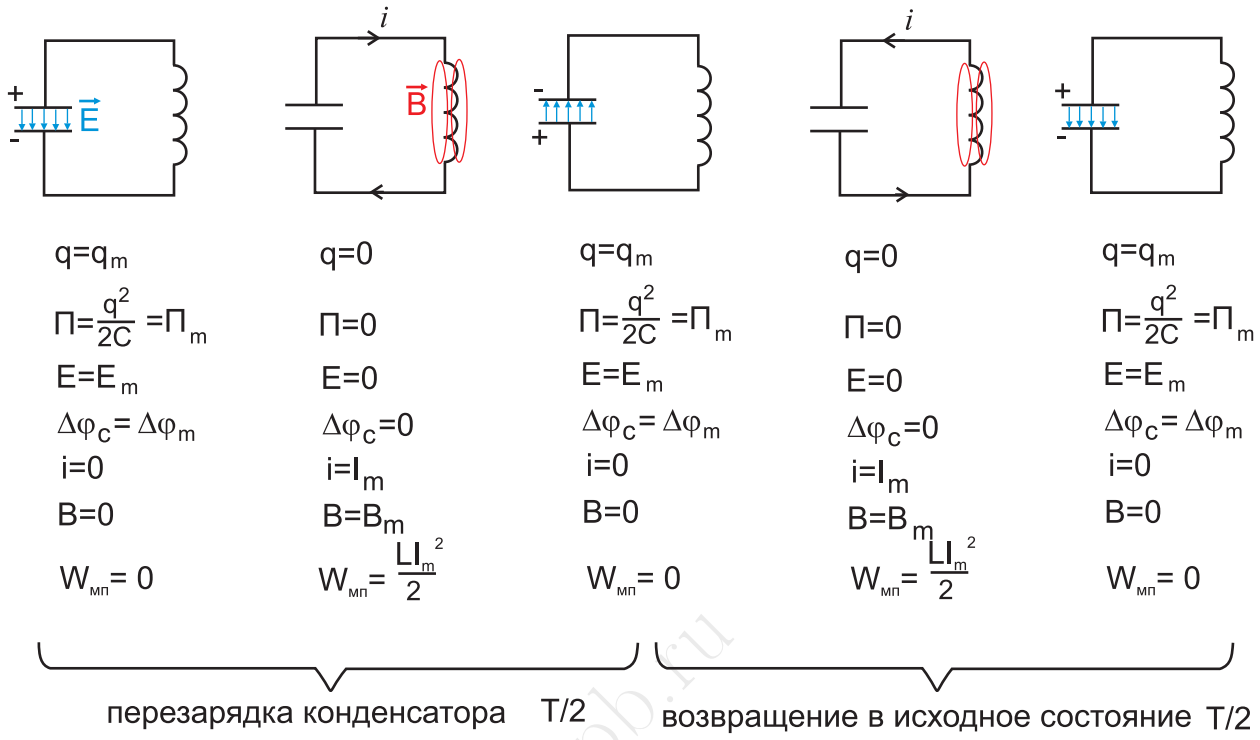
$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} T = 2\pi\sqrt{LC} \\ \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \end{array}}$$

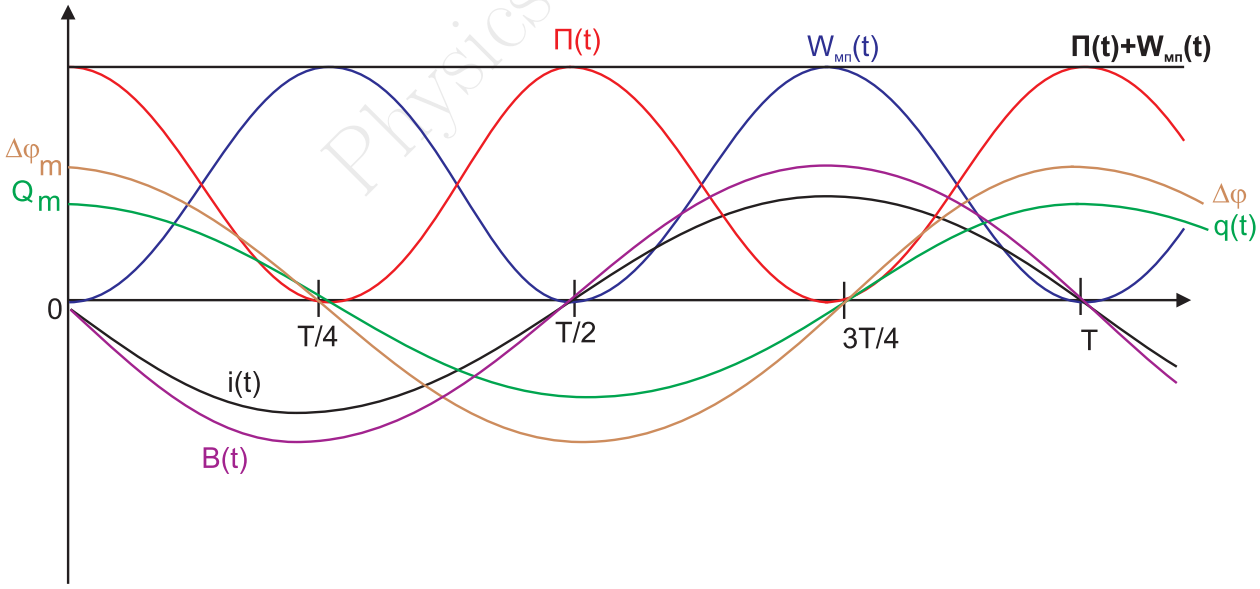
Physics.spb.ru

Последние формулы принято называть формулами Томсона. Названа в честь английского физика и математика Уильяма Томсона (лорда Кельвина), который вывел её в 1853 году.

Дальше рассмотрим что происходит с энергией и другими характеристиками, при свободных электрических колебаниях в идеальном LC-контуре.

Пусть в начальный й момент времени, конденсатор полностью заряжен. Напряженность электрического поля и заряд на обкладках будет максимальны. В этот момент, тока в контуре нет, соответственно катушка не создает магнитное поле. Далее конденсатор начинает разряжаться. И в момент полной разряд, ток в контуре достигнет максимального значения (второй рисунок). Это произойдет через четверть периода колебаний. В этот момент, вся энергия в контуре будет сосредоточена в катушке в виде энергии магнитного поля. Заряд на обкладках и напряженность электрического поля будут равны нулю. Далее ток должен начать ослабевать, но в катушке возникнет ЭДС самоиндукции, которая будет поддерживать убывающий ток. В результате ток продолжит убывая течь в том же направлении, в результате чего конденсатор перезарядится еще через четверть периода (третий рисунок). И далее все повторяется.





Physics.spb.ru

15.9 Переменный ток и его характеристики.

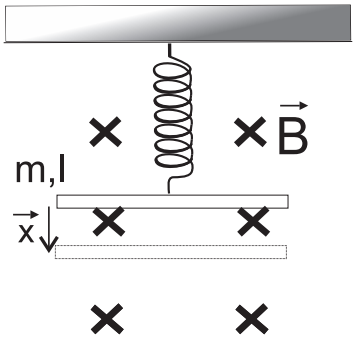
Рассмотрим колебания проводника в однородном магнитном поле.

$$\varepsilon_i = Bvl\sin\alpha$$

$$x(t) = x_m\cos\omega t$$

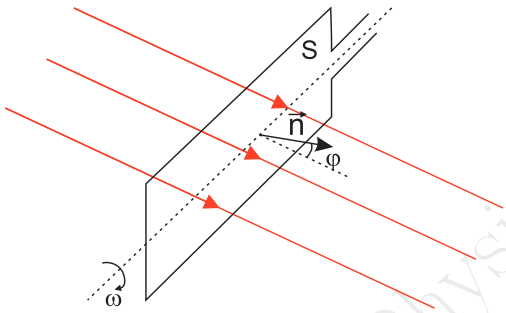
$$v(t) = x'(t) = -\omega x_m\sin\omega t = \omega x_m\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$\boxed{\varepsilon_i = Bl\omega x_m\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$



Если к такой системе присоединить электрическую цепь, то в ней возникнет ток, сила которого будет меняться по гармоническому закону и это будет пример вынужденных колебаний.

Рассмотрим опыт с вращением рамки в однородном магнитном поле (Видеоэксперимент).



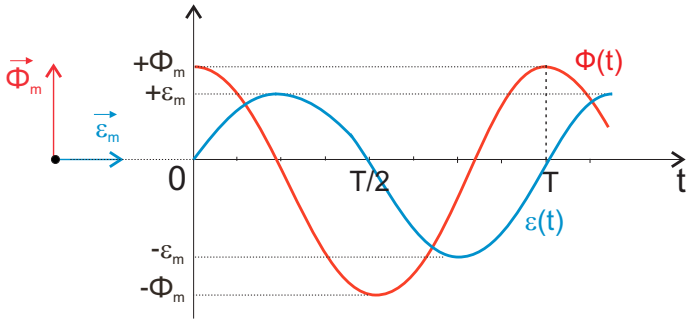
$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi(t) = BS\cos\omega t, \varphi_0 = 0$$

$$\varepsilon_i = -(-\omega BS\sin\omega t) = \omega BS\sin\omega t = \varepsilon_m\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

physics.spb.ru

Если вращать рамку с постоянной угловой скорость, то в ней будет возникать гармонически меняющая ЭДС.



При этом ЭДС будет запаздывать по фазе от магнитного потока на $\frac{\pi}{2}$. Само запаздывание, связано с тем, что причина возникновения ЭДС это изменение магнитного потока, а то что сдвиг именно по фазе на угол $\frac{\pi}{2}$, определяется тем, что именно в момент когда магнитный поток приближается к нулю, скорость его изменения будет наибольшей и именно в этот момент ЭДС будет максимальной.

Def. Электрический ток, возникающий под действием ЭДС, которое изменяется по гармоническому закону, называется переменным.

Переменный ток это вынужденные электромагнитные колебания.

В такой цепи, где источником является генератор, токи и напряжения будут меняться по гармоническому закону.

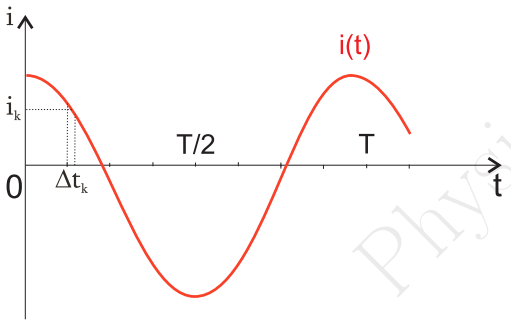
$$U = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$
$$I = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Далее увидим, что соотношение между φ_1 и φ_2 зависит от состава цепи.

15.9.1 Характеристики переменного тока.

$i(t)$ - мгновенное значение тока
I_m - амплитудное значение тока
T, ω, φ

Что показывает амперметр переменного тока? Из нашего опыта, какие действия переменного и постоянного токов можно отождествить?(Тепловые)



Считаем тепло, выделившиеся переменным током за период.

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} i_k^2 R \Delta t_k = R \int_0^T i^2(t) dt =$$

$$= R \int_0^T I_m^2 \cos^2 \omega t dt = \frac{RI_m^2}{2} \int_0^T (1 + \cos 2\omega t) dt =$$

$$= \frac{RI_m^2}{2} \int_0^T dt + \frac{RI_m^2}{2} \int_0^T \cos 2\omega t dt =$$

$$= \frac{RI_m^2 T}{2} + \frac{RI_m^2}{2} \left[\frac{1}{2\omega} \sin 2\omega T - \frac{1}{2\omega} \sin 0 \right] =$$

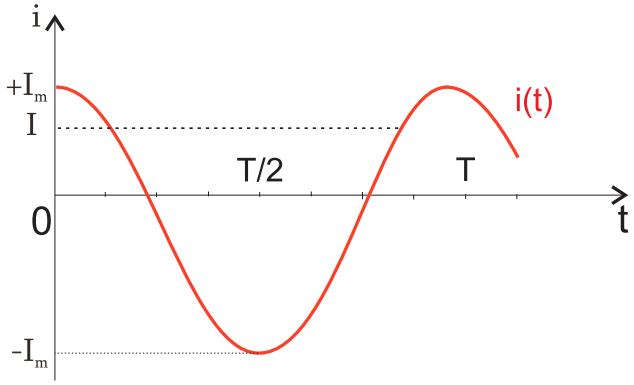
$$= \frac{RI_m^2 T}{2} + \frac{RI_m^2}{2} \left[\frac{1}{2\omega} \sin \frac{2 \cdot 2\pi T}{T} - \frac{1}{2\omega} \sin 0 \right] = \frac{RI_m^2 T}{2}$$

$$Q = I^2 RT$$

За тоже время некоторый постоянный ток совершил бы работу по выделению тепла: $I^2 RT$

$$\Rightarrow \quad \frac{I_m^2}{2} RT = I^2 RT \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$$

Def. За действующее значение переменного тока принимают значение такого постоянного тока, который за равное время выделяет такое же количество теплоты, что и данный переменный ток.



Аналогично для напряжения

$$\boxed{U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}}$$

Постоянный ток в металлах это дрейф электронов, на быстрое хаотическое движение накладывается более медленное упорядоченное движение.

Переменный ток - это колебательный дрейф электронов, на хаотическое движение накладывается более медленные колебания электронов. Синусоидальный переменный ток является вынужденным гармоническим колебанием.

15.9.2 Квазистационарные токи

Когда мы поворачиваем рубильник, лампочка сразу зажигается. Но мы знаем, что во-первых, упорядоченное движение очень медленное, а во вторых электроны не перемещаются, а колеблются. Кто же заставляет светиться лампочку?

По цепи распространяется электромагнитное возмущение(поле) со скоростью света. Эти выводы позволяют установить, что

Закон Ома остается справедливым и для мгновенных значений изменяющегося тока и напряжения, если их изменения происходят не слишком быстро.

С чем сравнивать быстро или нет меняется ток в цепи? Во-первых нам необходимо, чтобы во всех точках цепи мгновенные значения тока были одинаковы.

Def. Электромагнитное возмущение распространяется по цепи со скоростью света. Для достижения самой дальней точки цепи необходимо время $\tau = \frac{l}{c}$. Если за это время ток изменяется незначительно, то мгновенные значения тока во всех участках цепи будут практически одинаковы. Токи удовлетворяющие такому условию называются квазистационарными.

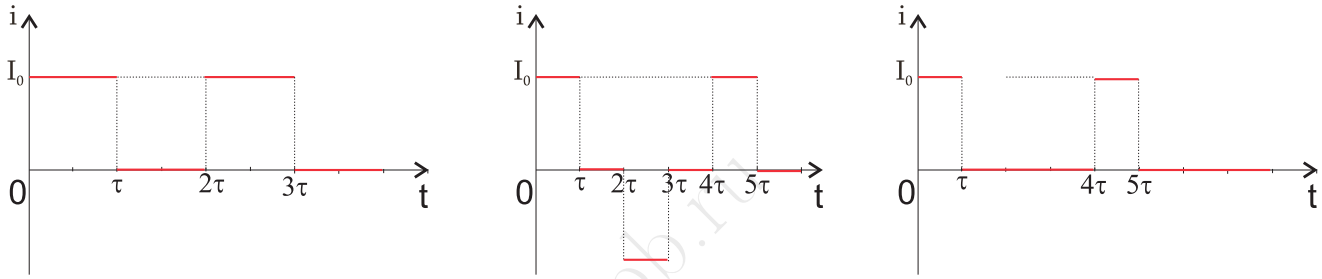
$$\tau << T$$

Примеры:

1) На каком расстоянии нельзя считать ток промышленной частоты 50 Гц - квазистационарным. Условием невыполнения будем считать отличие более 1%

$$\tau = 10^{-2}T \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{c} = 10^{-2}T \quad \Rightarrow \quad l = c10^{-2}T = c10^{-2}\frac{1}{\nu} = 3 \cdot 10^{8}\text{м/с} \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\text{с} = 60\text{км}$$

2) Найдем действующие значения силы тока для импульсных токов, приведенных на графиках.



$I_0^2 R\tau = I^2 R 2\tau$	$I_0^2 R\tau + I_0^2 R\tau = I^2 R 4\tau$	$I_0^2 R\tau = I^2 R 4\tau$
$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$	$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$	$I = \frac{I_0}{2}$

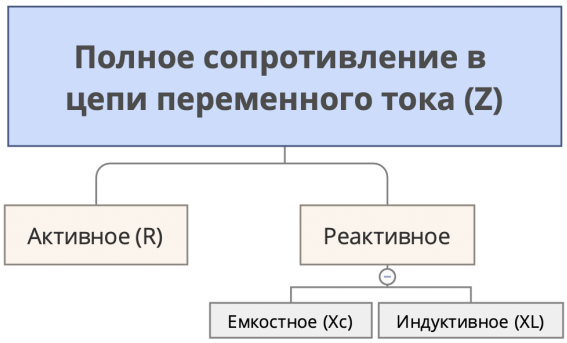
Видно, что импульсный ток можно подобрать такой, что у него действующее значение будет совпадать с формулой действующего значения переменного тока, но не всегда.

Physics.spb.ru

15.10 Виды сопротивлений в цепи переменного тока.

Из опытов можно убедиться, что различные виды нагрузок по разному проводят переменный ток.

С энергетической точки зрения сопротивления в цепи переменного тока делятся на два класса: активные сопротивления в которых происходят необратимые переходы энергии; и реактивные - в которых происходят обратимые переходы.



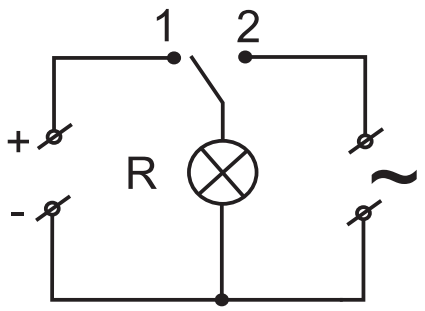
К активной нагрузке относятся обычные резисторы, в которых происходит необратимый переход энергии электрического тока в тепло. В конденсаторах и катушка, происходит переход энергии электрического тока в потенциальную энергию электростатического поля конденсатора, по мере его зарядки, а в катушке - в энергию магнитного поля катушки, по мере возрастания тока в цепи. А потом при разрядке конденсатора происходит возврат энергии в цепь, а в катушке появляется ЭДС самоиндукции, которая поддерживает убывающий ток за счет накопленной энергии магнитного поля. Т.е. в конденсаторе и катушке происходят обратимые переходы энергии и они относятся к реактивным сопротивлениям.

Def. Импеданс (Z)- полное сопротивление в электрической цепи переменного тока.

Physics.spb.ru

15.11 Активное сопротивление в цепи переменного тока.

Рассмотрим следующий эксперимент. Подключим лампу накаливания сначала к источнику постоянного напряжения, а потом к источнику переменного напряжения с той же величиной действующего значения. Опыт покажет, что в обоих случаях лампа будет светиться одинаково.



Вывод: Сопротивление лампочки по постоянному и переменному току практически одинаково.

Рассмотрим переменный ток (положение 2). Как уже говорилось, любой проводник обладает емкостью и индуктивностью, следовательно в общем виде, для мгновенных значений имеем

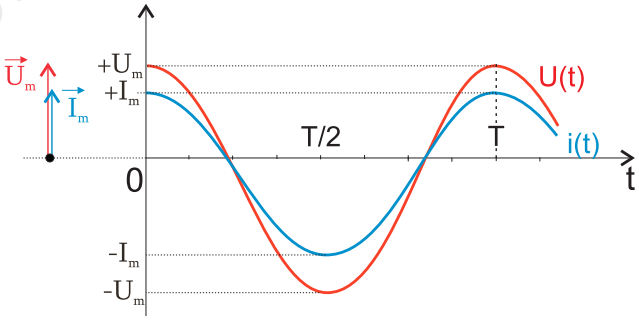
$$U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) = U_{\text{генер}}(t) \quad \Rightarrow$$

$$i(t)R + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = U_{\text{генер}}(t)$$

В идеальном случае, если пренебречь емкостью и индуктивностью, получим

$$i(t)R = U_{\text{генер}}(t) \quad \Rightarrow \quad i(t)R = U_m \cos\omega t$$

$$\Rightarrow \quad i(t) = \frac{U_m}{R}\cos\omega t \quad \Rightarrow$$



$$i(t) = I_m \cos\omega t$$

St. ➡ ***Активное сопротивление не вносит сдвиг по фазе между током и напряжением.***

$$I = \frac{U}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_m = \frac{U_m}{R}}$$

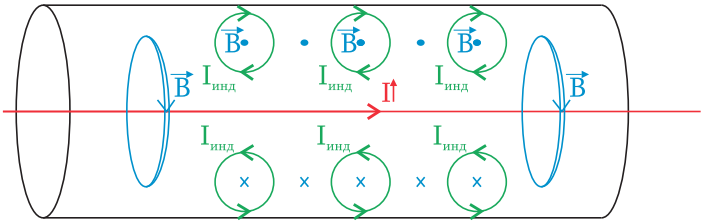
Энергетическое объяснение

При протекании переменного тока через активное сопротивление, происходит выделение тепла в соответствии с законом Джоуля-Ленца. На тепловом действии тока основана одна из характеристик тока - действующее значение. Этот переход энергии является необратимым, т.е. если проводник нагреть, в результате ток по нему не начнет протекать. В итоге, в резисторах происходит необратимый переход энергии.

Скин-эффект

Скин-эффект возникает при протекании высокочастотного тока по проводнику и заключается в том, что основной перенос заряда происходит вблизи внешней поверхности проводника.

Physics.spb.ru



Рассмотрим высокочастотный ток в тот промежуток времени, когда его величина возрастает. Вокруг него присутствует магнитное поле, индукция которого так же растет. Часть магнитных линий этого поля замкнется внутри проводника, что породит индукционные токи Фуко. Токи Фуко будут имеют такое направление, чтобы уменьшить наводящее магнитное поле поле. Тогда если сложить основной ток и индукционные токи, получится, что ток вблизи центра проводника уменьшается, а вблизи поверхности растет. Т.е. перенос заряда по проводнику смещается к поверхности. В результате уменьшается площадь сечения проводника, через которую течет ток, а следовательно растет сопротивление.

$S\downarrow \quad \Rightarrow \quad R\uparrow$

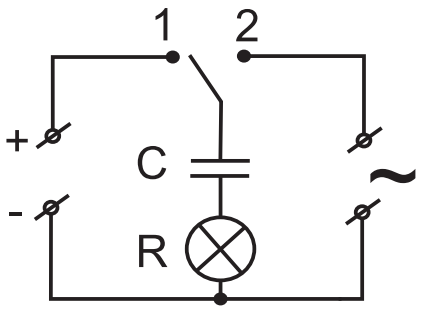
С ростом частоты тока, скорость изменения тока и магнитного потока будут расти, а следовательно будет возрастать индукционные токи. Площадь сечения будет падать, сопротивление расти и амплитуда колебания исходного тока будет уменьшаться. На практике это приводит к сильному нагреву поверхности проводника, чтобы избежать перегрева, в центре проводника вынимают металл и пропускают например воду, которая забирает излишки тепла.

Physics.spb.ru

15.12 Емкостное сопротивление в цепи переменного тока.

Рассмотрим опыт, в котором последовательно с лампочкой включим конденсатор. При подключении источника постоянного тока, лампа не загорится, т.к. конденсатор является разрывом в цепи постоянного тока. А при подключении источника переменного тока, лампа будет светиться.

Если увеличить емкость конденсатора, то увидим, что яркость свечения лампочки убывает. Т.е. с увеличением емкости, сопротивление конденсатора растет.



Вывод: Через конденсатор в цепи переменного тока может течь ток.

Что такое ток текущий через конденсатор? Это зарядка и перезарядка конденсатора. Т.е. физически заряд не переходит с одной обкладки конденсатора на другую, т.е. пробоя нет. Конденсатор просто постоянно перезаряжается, при этом заряды на пластинах меняют знак.

Рассмотрим случай чисто емкостной нагрузки, т.е. когда сопротивление $R = 0$:

$$U_C(t) = U_{\text{генер}}(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{q(t)}{C} = U_m \cos\omega t \quad \Rightarrow$$

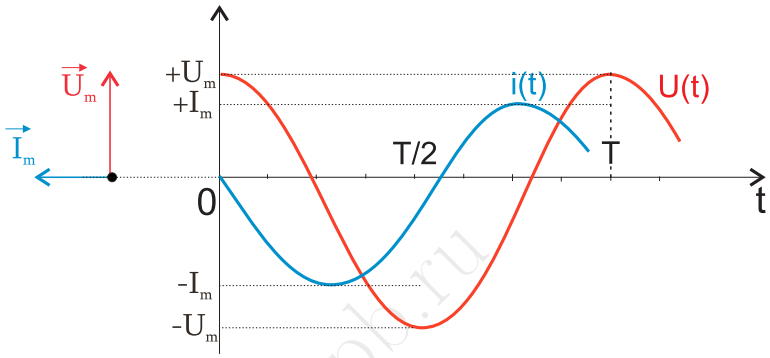
$$q(t) = CU_m \cos\omega t \quad \Rightarrow \quad i(t) = q'(t) = -\omega CU_m \sin\omega t = \omega CU_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$I_m = \omega CU_m = \frac{U_m}{X_C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_C = \frac{1}{\omega C}}$$

Проверим размерность

$$[X_C] = \frac{\text{с}}{\text{Ф}} = \frac{\text{с}}{\text{Кл}} \cdot \text{В} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{Ом}$$

Физически полученную формулу можно объяснить следующим образом. При росте частоты тока, конденсатор чаще перезаряжается, поэтому за одно и то же время, через подводящие провода будет проходить больший заряд, следовательно ток больше, а сопротивление конденсатора будет меньше. Аналогично с емкостью. Чем больше емкость, тем больший заряд накопится на обкладках за тоже самое время, следовательно ток больше, а сопротивление меньше.



St. ➡ *В цепи с емкостным сопротивлением ток опережает напряжение по фазе на $\frac{\pi}{2}$*

Физически это можно объяснить так, что для того, чтобы появилась разность потенциалов на обкладках конденсатора, туда должен сначала прийти заряд, поэтому ток будет опережать напряжение. А то, что разность фаз составляет $\frac{\pi}{2}$, объясняется тем, что когда конденсатор полностью заряжен и напряжение на конденсаторе максимальное, ток в цепи отсутствует.

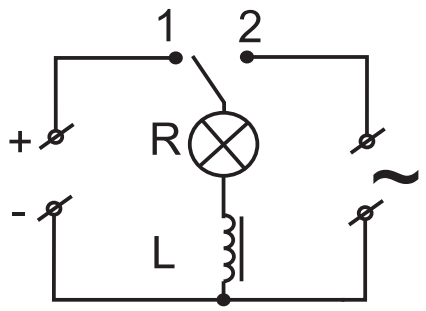
Энергетическое объяснение

Конденсатор в цепи переменного тока периодически запасает энергию в виде энергии электрического поля и потом отдает ее в цепь. Накопление энергии происходит в моменты зарядки конденсатора и достигает максимума, когда ток прекращается. И затем накопленная энергия при разрядке конденсатора возвращается в электрическую цепь. Т.е. в емкостном сопротивлении происходят обратимые переходы энергии.

15.13 Индуктивное сопротивление в цепи переменного тока

Рассмотрим опыт, в котором последовательно с лампочкой будет включена катушка индуктивности. Если сравнить яркость лампочки при подключении источника постоянного и источника переменного тока, то опыт покажет, что в положении 2 лампа светится менее ярко.

Вывод: сопротивление катушки в цепи переменного тока больше чем в цепи постоянного тока.



В цепи постоянного тока ЭДС самоиндукции возникает только при замыкании и размыкании ключа в положение 1, в остальное время катушка индуктивности ведет себя, как обычный резистор. А в цепи переменного тока ЭДС самоиндукции наблюдается непрерывно. Поэтому катушка индуктивности в цепи переменного тока действует ограничителем величины тока, т.е. как некоторое дополнительное сопротивление.

Из опыта $L\downarrow \quad \Rightarrow \quad X_L\downarrow$

$$\underbrace{i(t)R}_{R\to 0} - \varepsilon_{\text{сам}}(t) + \underbrace{\frac{q(t)}{C}}_{=0} = U_{\text{генер}}(t)$$

$$+L\frac{di(t)}{dt} = U_{\text{генер}}(t) \Leftrightarrow L\frac{di(t)}{dt} = U_m \cos\omega t$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{U_m}{L}\cos\omega t \Leftrightarrow di(t) = \frac{U_m}{L}\cos\omega t dt$$

$$\int di(t) = \int \frac{U_m}{L}\cos\omega t dt$$

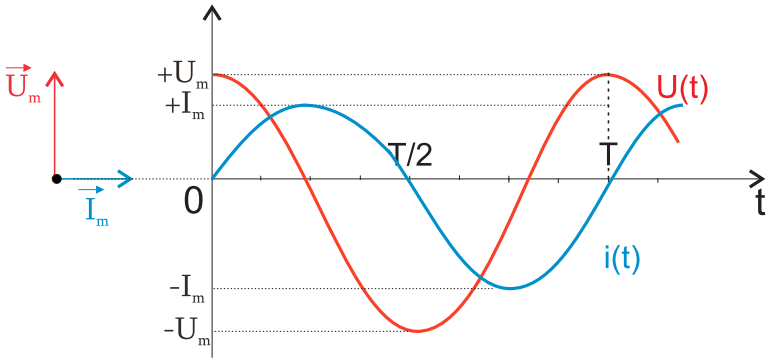
$$i(t) = \frac{U_m}{\omega L}\sin\omega t + C_1$$

Константа $C_1 = 0$, т.к. если это было бы не так, то физически это соответствовало наличию постоянного тока в данной цепи, а это не так. Тогда

$$i(t) = \frac{U_m}{\omega L}\sin\omega t = \frac{U_m}{\omega L}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

St. ➡ *В цепи с индуктивностью ток отстает по фазе от напряжения на $\frac{\pi}{2}$ "запутывается в витках катушки"*

Physics.spb.ru



$$\frac{U_m}{\omega L} = I_m = \frac{U_m}{X_L} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{X_L = \omega L}$$

$$[X_L] = \text{Гц} \cdot \text{Гн} = \frac{1}{\text{с}} \cdot \frac{\text{В}}{\text{А/с}} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{Ом}$$

Физически полученную формулу можно объяснить так. При возрастании частоты, увеличивает скорость изменения магнитного потока, пронизывающего катушку. В результате явления самоиндукции, величина ЭДС самоиндукции возрастает. Аналогично с индуктивностью.

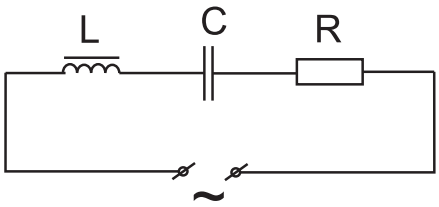
Энергетическое объяснение

При возрастании силы тока катушка запасает энергию в виде энергии магнитного поля, а при уменьшении тока катушка возвращает, накопленную энергию, в цепь за счет действия ЭДС самоиндукции, которое поддерживает убывающий ток. Т.е. здесь также происходит обратимые переходы энергии.

15.14 Закон Ома для переменного тока.

Рассмотрим следующую цепь

$$U_{\text{генер}}(t) = U_m \cos \omega t$$



Как найти максимальное и действующее значения тока в этой цепи? Можно например из опыта: закорачиваем катушку и затем конденсатор.

Для мгновенных значений напряжений будет выполняться следующее соотношение (при последовательном соединении)

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = U_{\text{генер}}(t)$$

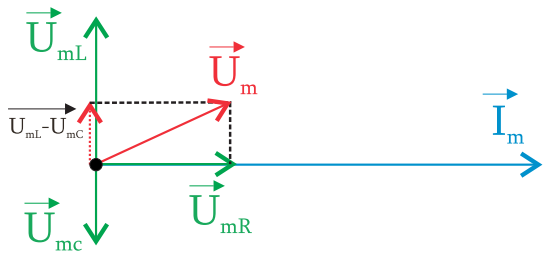
Опыт показывает, что при всех включенных элементах ток больше, т.е. полное сопротивление будет меньше суммы сопротивлений.

$$Z < R + X_L + X_C$$

Здесь Z - импеданс - полное сопротивление в цепи переменного тока.

Поскольку токи одинаковые то для действующих значений напряжений будет выполняться следующее неравенство.

$$U < U_R + U_L + U_C$$



Для того, чтобы объяснить почему так получается, построим векторную диаграмму. Будет откладывать напряжения относительно оси токов, которая будет одинаковой для каждого элемента(все токи равны при последовательно соединении).

Из диаграммы видно, что напряжение на катушке и конденсаторе меняется в противофазе и сложить просто величины векторов нельзя, их нужно складывать как вектора.

$$U_{mR} = I_m R$$
$$U_{mL} = U_m \omega L$$
$$U_{mC} = I_m \tfrac{1}{\omega C}$$

$$U_m = \sqrt{U_{mR}^2 + (U_{mL} - U_{mC})^2} = \sqrt{I_m^2 R^2 + I_m^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = I_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \qquad \boxed{\cos\varphi = \frac{I_m R}{I_m Z} = \frac{R}{Z}}$$

отсюда видно, почему импеданс меньше алгебраической суммы сопротивлений всех элементов цепи.

Действующее значение тока будет

$$\boxed{I = \frac{U}{Z}} \qquad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

В итоге закон Ома для цепи переменного тока будет выполняться, как для амплитудных, так и для действующих значений в следующем виде

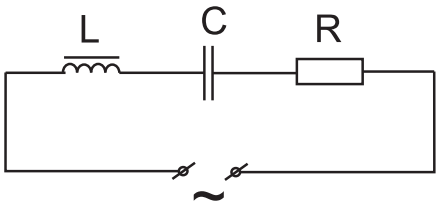
Law ➡ *Сила тока в цепи переменного тока прямо пропорциональна напряжению, а коэффициентом пропорциональности является величина обратная импедансу.*

15.15 Резонанс в электрической цепи.

Def. Резонанс в электрической цепи - это резкое возрастание амплитуды силы тока при приближении частоты генератора к собственной частоте колебании LC - контура, включенного в эту цепь.

(Видеоэксперимент R).

Так как промышленную частоту тока мы изменить не можем, подберем значение емкости и индуктивности так, чтобы $U_{mL} = U_{mC}$. Тогда в опыте мы увидим, что

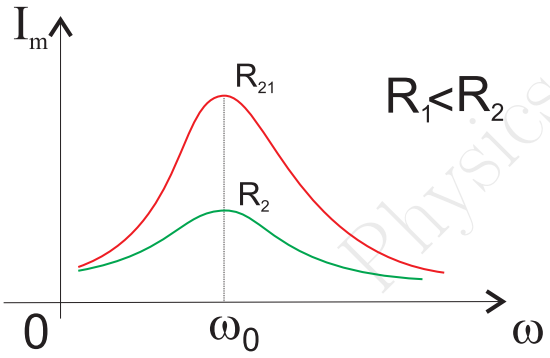


$$U_{mR} + U_{mC} + U_{mL} = U_{mR} >> U_m$$

Это можно объяснить только тем, что в результате резонанса произошло резкое возрастание силы тока.

Амплитуда тока достигает максимального значения, когда полное сопротивление будет наименьшим NB!

physics.spb.ru



$$Z = Z_{min} \quad \Rightarrow \quad X_L = X_C \Leftrightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow$$

В свободном колебательном контуре $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

$$\omega = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad Z = R \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{R}{Z} = 1$$

Энергетическое объяснение

Т.е. при резонансе косинус сдвига фаз между током и напряжением будет равен единице. Следовательно в этот момент амплитудные значения напряжения на конденсаторе и на катушке будут равны по величине и сдвинуты по фазе на π. Таким образом с точки зрения энергии, при резонансе, будет происходить обмен энергией между катушкой и конденсатором, а амплитуда тока ограничена активным сопротивлением, на котором выделяется тепло пропорциональное квадрату действующего значения силы тока (в соответствии с законом Джоуля-Ленца). Если проводить аналогию с механикой, это как сила сопротивления о воздух, пропорциональная скорости.

Применение в технике

На практике, на производствах, где при наличии станков присутствует большая индуктивная нагрузка? либо вручную, либо при помощи автоматики контролируют значение $cos\varphi$ и корректируют его значение при помощи резервных батарей конденсаторов, для того, чтобы избежать резкого возрастания силы тока, которое может привести к выходу из строя оборудование.

15.16 Мощность в цепи переменного тока.

В цепи постоянного тока для расчета мощности мы использовали формулу

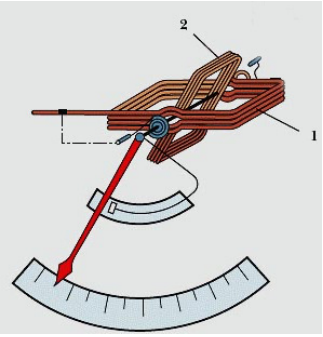
$$P = UI \qquad [P] = \text{Вт}$$

Рассмотрим теперь мощность в цепи переменного тока. Определим сначала мгновенную мощность:

$$\boxed{p(t) = u(t) \cdot i(t)}$$

Def. Мгновенная мощность равна произведению мгновенного значения напряжения на мгновенное значение силы тока.

Для перемножения тока и напряжения существует электромеханический прибор - ваттметр. В нем присутствуют две катушки: 1) Амперова - включается последовательно(более толстая, неподвижная) 2)Вольтова - параллельно(менее толстая, подвижная)



Когда ваттметр включается в сеть, в обмотках его катушек появляются магнитные поля, взаимодействующие между собой. За счет этого взаимодействия происходит образование момента вращения, отклоняющего движущуюся обмотку на величину расчетного угла. Угол отклонения будет определяться произведением силы тока в обоих катушках, а в итоге произведением силы тока и напряжения

$$F_{\text{магн}} \sim I_v I_A, \quad I_V \sim U \quad \Rightarrow \quad F_{\text{магн}} \sim UI$$

Т.е. прибор позволяет перемножить две величины электромеханическим способом.

Помимо мгновенной мощности, существует понятие средней мощности.

Def. Средняя мощность переменного тока показывает какую работу совершает переменный ток за единицу времени.

Обычно в качестве промежутка времени берется период и тогда говорят о средней мощности за период.

$$\boxed{\langle P \rangle_T = \frac{A_T}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt}$$

Рассмотрим далее несколько частных случаем.

15.16.1 Мощность на активном сопротивлении $Z = R$

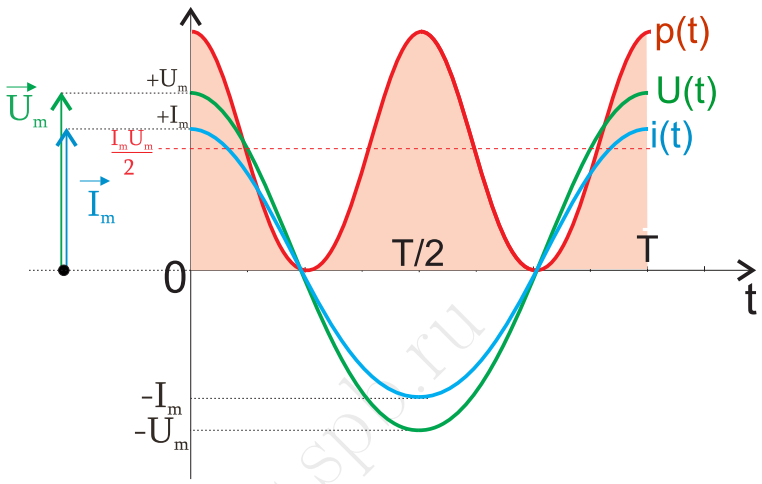
На активном сопротивлении нет сдвига фаз между током и напряжением. Поэтому

$$U(t) = U_m \cos\omega t \qquad i(t) = I_m \cos\omega t$$

Тогда мгновенная мощность будет равна

$$p(t) = i(t)u(t) = I_m U_m \cos^2 \omega t = \frac{I_m U_m}{2} + \frac{I_m U_m}{2} \cos 2\omega t$$

Если построить графики зависимости силы тока, напряжения и мгновенной мощности, то можно будет увидеть, что мгновенная мощность меняется в два раза чаще, чем ток. Это связано с тем, что активное сопротивление выделяет мощность в виде тепла и это не зависит от направления протекания тока.



Найдем теперь среднюю мощность за период.

$$\langle P \rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T (\frac{I_m U_m}{2} + \frac{I_m U_m}{2}\cos 2\omega t)dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_m U_m}{2}dt + \frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_m U_m}{2}\cos 2\omega t dt$$

Второй интеграл будет равен нулю, т.к. если просуммировать площади под косинусом или синусом на промежутке времени кратном периоду, то получится ноль. Или можно просто посчитать интеграл

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_m U_m}{2}\cos 2\omega t dt = \frac{I_m U_m}{2T}\frac{1}{2\omega}(sin 2\omega T - sin 2\omega 0) =$$

$$= \frac{I_m U_m}{2T}\frac{1}{2\omega}(sin 2\frac{2\pi}{T}T - 0) = \frac{I_m U_m}{2T}\frac{1}{2\omega}(sin 4\pi) = 0$$

В итоге средняя мощность на периоде будет равна

$$\langle P \rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_m U_m}{2}dt = \frac{1}{T}\frac{I_m U_m}{2}\int_0^T dt = \frac{1}{T}\frac{I_m U_m}{2}T =$$

$$= \frac{I_m U_m}{2} = I \cdot U$$

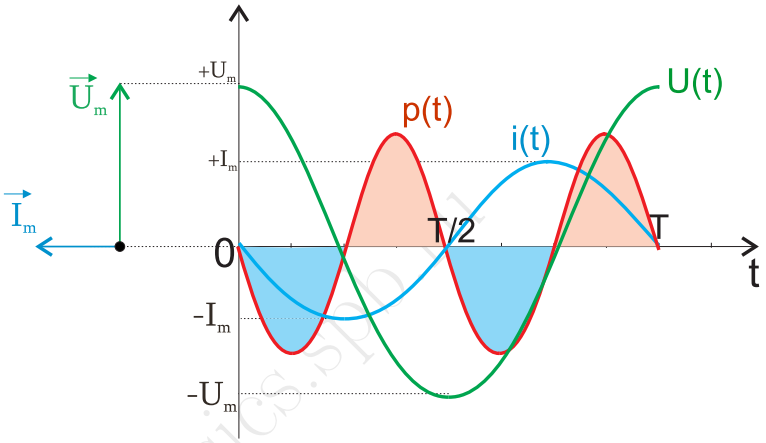
15.16.2 Мощность на емкостном сопротивлении $Z = X_C$

Повторим теперь вывод для чисто емкостного сопротивления, который вносит сдвиг фаз между током и напряжением на величину $\frac{\pi}{2}$.

$$U(t) = U_m \cos \omega t \qquad i(t) = I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Тогда мгновенная мощность будет равна

$$p(t) = i(t)u(t) = I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) U_m \cos \omega t = -I_m U_m \sin \omega t \cos \omega t = -\frac{1}{2} IU \sin 2\omega t$$



Из формул и графика видно, что мгновенная мощность будет также иметь удвоенную частоту по сравнению с током, но в отличии от активного сопротивления, емкость периодически будет забирать из цепи мощность и ровно такую же мощность будет возвращать (площади закрашенные синим и красным). Поэтому средняя мощность за период должна быть равна нулю.

$$\langle P \rangle_T = -\frac{1}{2T} \int_0^T \frac{I_m U_m}{2} \sin 2\omega t dt = 0$$

Интеграл считается аналогично предыдущему случаю.

15.16.3 Мощность в общем случае Z

Рассмотрим теперь общий случай.

$$U(t) = U_m \cos \omega t \qquad i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

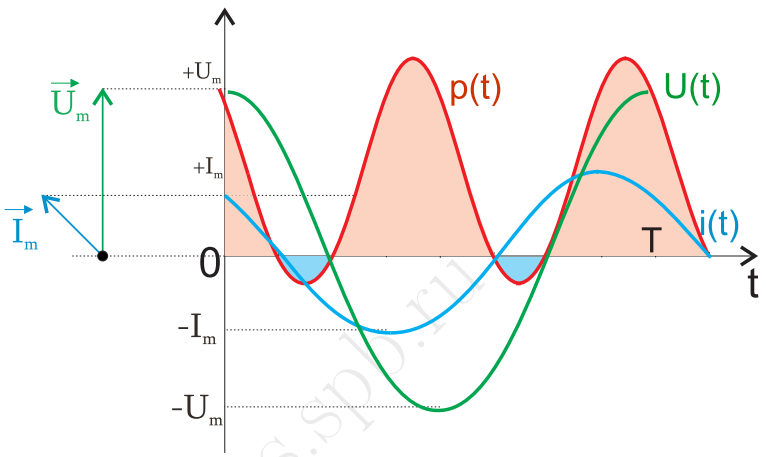
$$p(t) = I_m U_m \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) = \frac{I_m U_m}{2} (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi) =$$

$$= \frac{I_m U_m}{2} \cos \varphi + \frac{I_m U_m}{2} \cos(2\omega t + \varphi)$$

Видно, что и в общем случае мгновенная мощность меняется с удвоенной частотой. Если же посчитать среднюю мощность за период, то как и ранее интеграл от второго слагаемого на периоде даст ноль, а первое

$$\langle P\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_m U_m}{2}\cos\varphi dt = \frac{I_m U_m}{2}\cos\varphi = UI\cos\varphi$$

$$\boxed{\langle P\rangle_T = UI\cos\varphi}$$



В общем случае мощность возвращаемая в цепь будет меньше мощности излучаемой (забираемой) из цепи.

Тот же результат, можно было получить более простым способом. Учитывая, что мощность в цепи переменного тока выделяется в виде тепла только на активном сопротивлении, то пользуясь понятием действующего значения силы тока, можно записать:

$$\langle P\rangle_T = I^2R = I\cdot IR = I\frac{U}{Z}R = IU\cos\varphi$$

Итого

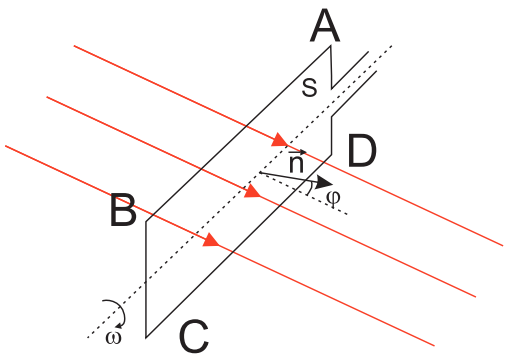
St. ➡ *Мощность в цепи переменного тока выделяется только на активном сопротивлении. Если в цепь введены реактивные сопротивления, то она влияют на амплитуду тока в цепи*

$\cos\varphi$ *называют еще коэффициентом мощности.* NB!

15.17 Производство и передача электроэнергии.

Def. Генератор переменного тока это устройство преобразующее какой-либо вид энергии в энергию переменного тока.

Рассмотрим более подробно выработку электрического тока. В основе лежит явление электромагнитной индукции.

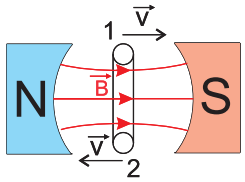
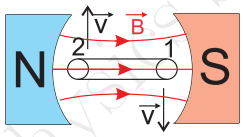
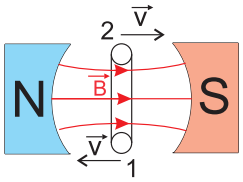
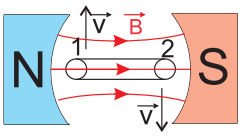


$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi(t) = BS\cos\omega t, \varphi_0 = 0$$

$$\varepsilon_i = -(-\omega BS\sin\omega t) = \omega BS\sin\omega t = \varepsilon_m\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

В таком источники тока, в качестве сторонней силы выступает сила Лоренца.

$t = 0$	$t = \frac{T}{4}$	$t = \frac{T}{2}$	$t = \frac{3T}{4}$
			
$\alpha = (\vec{B}, \vec{v}) = 0$ $F_{\text{Лор}} = 0$ $\Phi = \Phi_max$ $i(t) = 0$	$\alpha = 90°$ $F_{\text{Лор}} = F_{\text{Лор MAX}}$ $\Phi = 0$ $i(t) = I_m$	$\alpha = 180°$ $F_{\text{Лор}} = 0$ $\Phi = \Phi_max$ $i(t) = 0$	$\alpha = 270°$ $F_{\text{Лор}} = F_{\text{Лор MAX}}$ $\Phi = 0$ $i(t) = I_m$

Действие силы Лоренца на заряженные частицы в контуре АБСД проявляется только в частях АВ и СД (рабочие части), в остальных элементах рамки действие силы Лоренца перпендикулярно проводникам.

Технологически любой генератор можно разделить на статор (неподвижная часть, обычно магнит) и ротор (подвижная часть, обычно рамка). В промышленности из-за того, что с рамки необходимо снимать напряжение, вращают магниты.

Индуктор(постоянный магнит или катушка) - ротор, Якорь(обмотка) - статор

т.к. существуют большие потери энергии в скользящем контакте.

Турбины гидроэлектростанций огромной массы невозможно вращать с частотой 50Гц, поэтому используют несколько пар магнитов, тогда если

n - число оборотов ротора в ед. времени, ν - частота вырабатываемого тока, k - число пар полюсов магнита

$$\boxed{n = \frac{\nu}{k}}$$

Электростанции

Электростанции обычно классифицируют по виду энергии из которой получается энергия переменного тока: гидроэлектростанции, тепловые, АЭС, ветровые, приливные

При производстве электрической энергии часть тепловой энергии утилизируется на теплоснабжение самой станции и окружающих населенных пунктов. Соотношение между потраченной энергией и утилизированной, выраженное в процентах называется тепловым КПД.

Сумма КПД электрического и теплового КПД называется КПД использования топлива, чем он выше, тем эффективнее электростанция. При этом стоит отметить, что на АЭС чаще всего тепло не утилизируется, а полностью используется для выработки электроэнергии и суммарный КПД атомной электростанции равен электрическому.

Также стоит отметить, что на тепловых и атомных электростанциях для выработки самой электроэнергии используются тепловые машины, такие как паровые и газовые турбины. И итоговый электрический КПД будет зависеть от КПД этих тепловых машин.

Тип	**Обозначение**	**Электр. КПД**	**Топливо**	**Особенности.**
Гидроэлектростанция	ГЭС	92-94%	Энергия падающей воды	Выработка большой мощности. Необходимость постройки плотин и затопление части земли.
Теплоэлектростанция	ТЭС	33-35%	уголь, газ, мазут, торф	Постоянная выработка электроэнергии без колебаний. Необходимость очистки продуктов горения.
Парогазовые установки	ПГУ	50-65%	Газ	Необходимость очистки продуктов горения.
Атомные электростанции	АЭС	40-44%	Ядероное топливо	Выработка большой мощности. Сложная конструкция. Необходимость утилизировать отработанное топливо.
Ветроэлектростанции	ВЭС	50%	Энергия ветра	Зависимость от ветра. Низкочастотные звуки.
Приливные	ПЭС	92-94%	Энергия движущейся воды	Наличие приливов. Зависимость от погоды.

Передача электроэнергии.

Рассмотрим теперь передачу электроэнергии от источника (электростанции) к потребителям. Основными потребителями являются производства, типа металлургических и города с большим населением.

КПД при передаче электроэнергии определяется так

$$\eta = \frac{IU\cos\varphi}{I\varepsilon}$$

Потери при передаче электроэнергии происходят в основном за счет нагрева проводов, по которым осуществляется передача. $Q = I^2Rt$

Как можно уменьшить эти потери?

1. Уменьшить сопротивление, например вместо алюминия использовать медь. Или увеличить сечение проводов, но тогда придется ставить более прочные опоры ЛЭП. Либо уменьшить время протекания тока, что не представляется возможным.

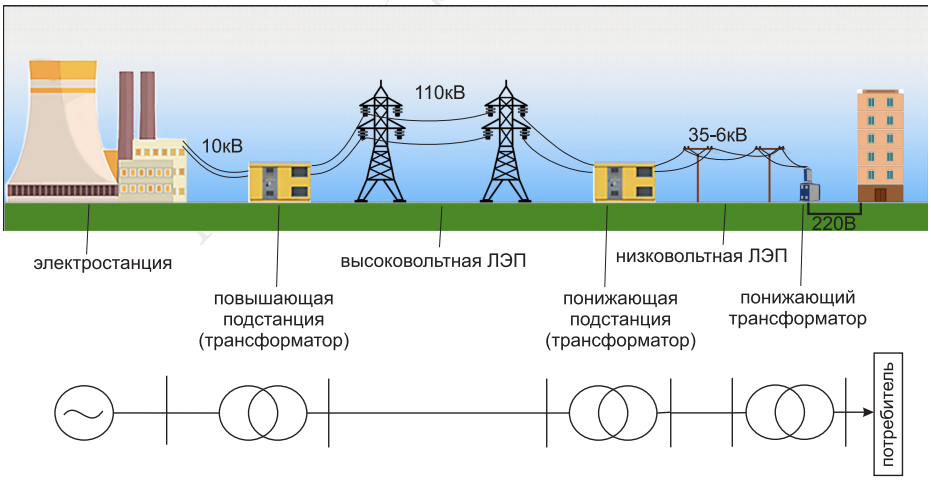
2. Уменьшить ток, сохраняя прежнюю мощность, т.е. увеличить напряжение на входе в линию электропередач.

$$R = \rho\frac{2l}{S} \quad \Delta P_{\text{потерь}} = \frac{Q}{t} = I^2R, \quad P = IU\cos\varphi = const \quad \Rightarrow$$

$$\Delta P_{\text{потерь}} = \frac{P^2 2\rho l}{SU^2\cos^2\varphi} \quad \Rightarrow \quad U\uparrow \quad \Rightarrow \quad \Delta P\downarrow$$

На предприятиях следят за содержанием $\cos\varphi$ в определенных пределах, обычно порядка 0.88. При переходе от 0,63 к 0,88 потери уменьшаются вдвое.

Рассмотрим простейшую схему передачи электроэнергии.

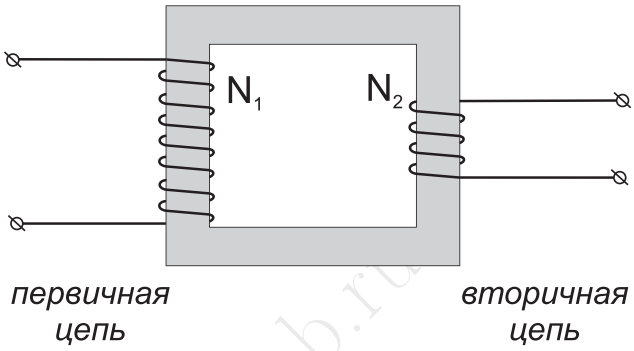


Для уменьшения потерь, на выходе с электростанции расположена повышающая подстанция, которая посредством трансформатора повышает напряжение с сохранением мощности. Ка позже увидим, КПД у трансформатора достаточно большой. Далее электроэнергия на больше расстоянии передается посредством высоковольтной линией электропередач (ЛЭП). Далее недалеко от потребителя, происходит понижение до 6-35 кВ и далее либо по воздушной ЛЭП или по подземному кабели до понижающего оконечного трансформатора, где происходит финальное понижение напряжения до 220/380 В с повышением тока (сохраняется мощность). Также стоит отметить, что таких изолированных схем, как на рисунке нет. В единой энергосистеме присутствует большое количество электростанций разного типа и большое количество потребителей. Основные потребители это не население, а производства. Мощность при этом распределяется по электросетям аналогично воде в водопроводе. Где линия предназначена для передачи больше мощности, там меньше сопротивление (провода толще), туда и пойдет основной ток.

15.18 Трансформатор.

Def. Трансформатор - прибор, который преобразует переменный ток одного напряжения и величины в переменный ток другого напряжения и величины той же частоты и мощности.

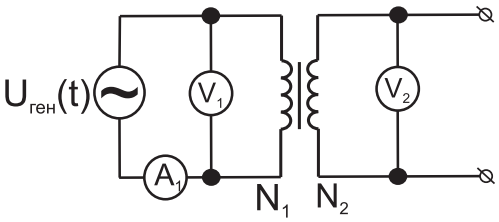
Изобретен 1878 году Яблочковым. Причем, самое интересное и наверное обидное, что имя этого гениального инженера не включено в реестр физиков в сборнике статей. Практически в мире не найти дома, где бы не использовались трансформаторы.



Конструктивно трансформатор представляет две катушки намотанные на одном сердечнике. В основе работы лежит явление электромагнитной индукции.

15.18.1 Холостой ход

Def. Холостой ход - это режим работы когда нет нагрузки, вторичная катушка разомкнута.



При подаче переменного напряжения в первой катушке возникает ЭДС самоиндукции. Введ следующие обозначения:

e - ЭДС одного витка

N_1 - число витков в первичной обмотке

N_2 - число витков во вторичной обмотке

По закону ЭМИ $e(t) = -\Phi'(t)$, следовательно в первичной катушке

$$\varepsilon_1 = N_1 e$$

Т.к. катушки насажены на один сердечник, то

$$\Phi_1(t) = \Phi_2(t) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_2 = N_2 e$$

Тогда

$$\boxed{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{N_1}{N_2} = k}$$

k - коэффициент трансформации

Т.к. трансформатор состоит из катушек с большой индуктивностью, то $Z_1 = \omega L_1, (Z_1 >> r_1)$, отсюда

$$I_{1xx} = \frac{U_1}{Z_1} \approx \frac{U_1}{\omega L_1}$$

Ток холостого хода мал, т.к. велика индуктивность первичной катушки. Малое активное сопротивление первичной катушки определяет то, что

$$U_1(t) = i_1(t)r_1 + \varepsilon_1(t) \approx \varepsilon_1(t)$$

Во вторичной катушке электрическое поле вообще не работает, следовательно

$$U_2(t) = \varepsilon_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{N_1}{N_2} = \boxed{k = \frac{U_1}{U_2}}$$

Отсюда, если $k > 1$, то трансформатор понижающий, иначе повышающий

Если во вторичной цепи ток не идет, то

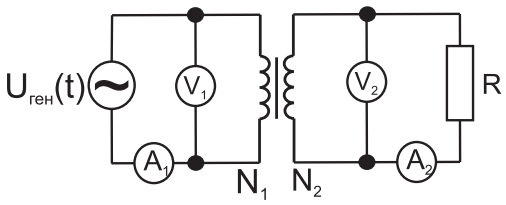
$$P_2 = I_2 U_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_{xx} = \frac{P_2}{P_1} = 0$$

Кроме этого трансформатор при xx представляет часть реактивного сопротивления, он практически не потребляет энергию, кроме нагревания и перемагничивания.

physics.spb.ru

15.18.2 Рабочий ход

Замкнем вторичную катушку. Ток в первичной обмотке увеличится. Увеличение силы тока в первичной цепи при появлении нагрузки во вторичной цепи можно наблюдать в следующем опыте (Видеоэксперимент).



Энергетическое объяснение: Чтобы на сопротивлении выделилось тепло $Q = I^2R$ необходимо эту энергию "черпать"из первичной цепи, следовательно ток в первичной цепи должен увеличится.

Объяснение на основе ЯЭМИ: При прохождении тока по вторичной цепи, он создает магнитный поток, мешающий (по правилу Ленца) изменению потока Φ_1. Тогда суммарный поток уменьшается. Для того, чтобы восстановить прежнее значение потока через сердечник, ток в первичной обмотке должен возрасти, т.к. $\Phi = LI \quad \Rightarrow$

$$\boxed{I_{px} > I_{xx}}$$

St. ➡ *Трансформатор саморегулирующаяся система. При изменении нагрузки автоматически изменяется количество энергии, потребляемой из сети*

Где может теряться энергия? Нагревание проводов, Перемагничивание сердечника. Нагревание сердечника приводит к потери энергии (нагревание происходит током Фуко). Но если сердечник подобрать из листов, то потери снижаются.

Для современных трансформаторов

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} 100\% \approx 95\%$$

$$P_2 = I_2 U_2 \cos\varphi_2 \quad P_1 = I_2 U_2 \cos\varphi_2 + P_{\text{меди}} + P_c = I_1 U_1 \cos\varphi_1$$

Потери в "меди"это потери на нагревание проводов, из которых намотаны катушки. Потери в стали это потери на перемагничивание стальных сердечников и их колебания, которые порождают характерный низкочастотный звук с частотой 50 Гц.

15.18.3 Номинальный режим

При номинальном, полностью нагруженном режиме работы

$$\boxed{\varphi_1 = \varphi_2 = 0}$$

тогда мощности будет равны

$$P_1 = I_1 U_1 \quad P_2 = I_2 U_2$$

Если пренебречь потерями в "стали"и "меди тогда в номинальном режиме

$$\eta = 1 \quad \Rightarrow \quad I_1 U_1 = I_2 U_2$$

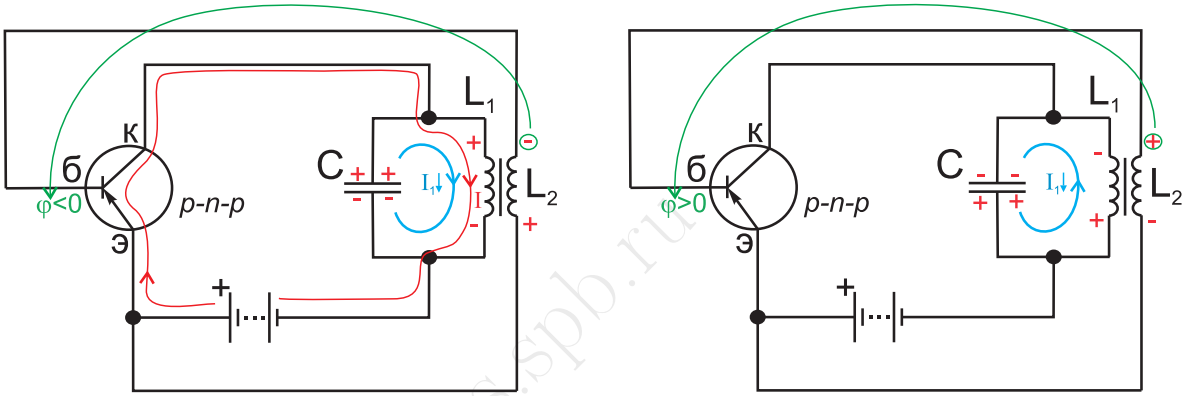
$$U_1 = \varepsilon_1 \quad U_2 = \varepsilon_2$$

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} \approx \frac{N_1}{N_2} = k}$$

Physics.spb.ru

15.19 Генератор высокой частоты, как пример автоколебательной системы.

Рассмотрим генератор высокой частоты(ГВЧ). В любой автоколебательной системе присутствует источник энергии, ключ и собственно сама колебательная система. В случае генераторы высокой частоты, нам необходимо получиться электрические незатухающие колебания в LC контуре, большой частоты. Электромеханическим способом сделать это невозможно, т.к. частоты могут достигать ГГц. Поэтому в ГВЧ в качестве колебательной системы используется LC-контур, а в качестве ключа используют транзистор. В качестве источника энергии - батарею.



Если расположить катушки L_1, L_2 вблизи друг друга, получим трансформатор высокой частоты, где роль первичной обмотки играет L_1, а вторичной L_2.

Рассмотрим вариант схемы с $p-n-p$ транзистором. Данный тип транзистора будет открыт, когда на базу транзистора подан отрицательный потенциал относительно эмиттера. В этом случае батарея будет подключена к колебательному контуру. Управление потенциалом осуществляется самим контуром через обратную индуктивную связь, при помощи катушки L_2.

Пусть от какого-то толчка в контуре CL_1 возникли колебания с частотой $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}$. Не будь поддержки(замкнули цепь) эти колебания затухли бы, но благодаря обратной связи они будут не только поддержаны, но и даже усилены.

Как только в контуре возникнут колебания, в катушке обратной связи L_2 будет индуцировать переменное напряжение. Это напряжение будет подано на базу транзистора и ток коллектора начнет пульсировать с той частотой, которую заказал контур. В результате, в контуре возникнут еще более мощные колебания и в катушке обратной связи будет еще большее напряжение. Такой круговорот будет повторяться много раз, так что некоторое время амплитуда колебаний будет возрастать. При этом резко возрастают потери энергии. Когда потери энергии контура сравняются с количеством поступающей туда энергии, амплитуда колебаний в контуре перестанет увеличиваться. Устанавливается незатухающие колебания определенной частотой контура $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}$. Т.е. возникнут автоколебания.